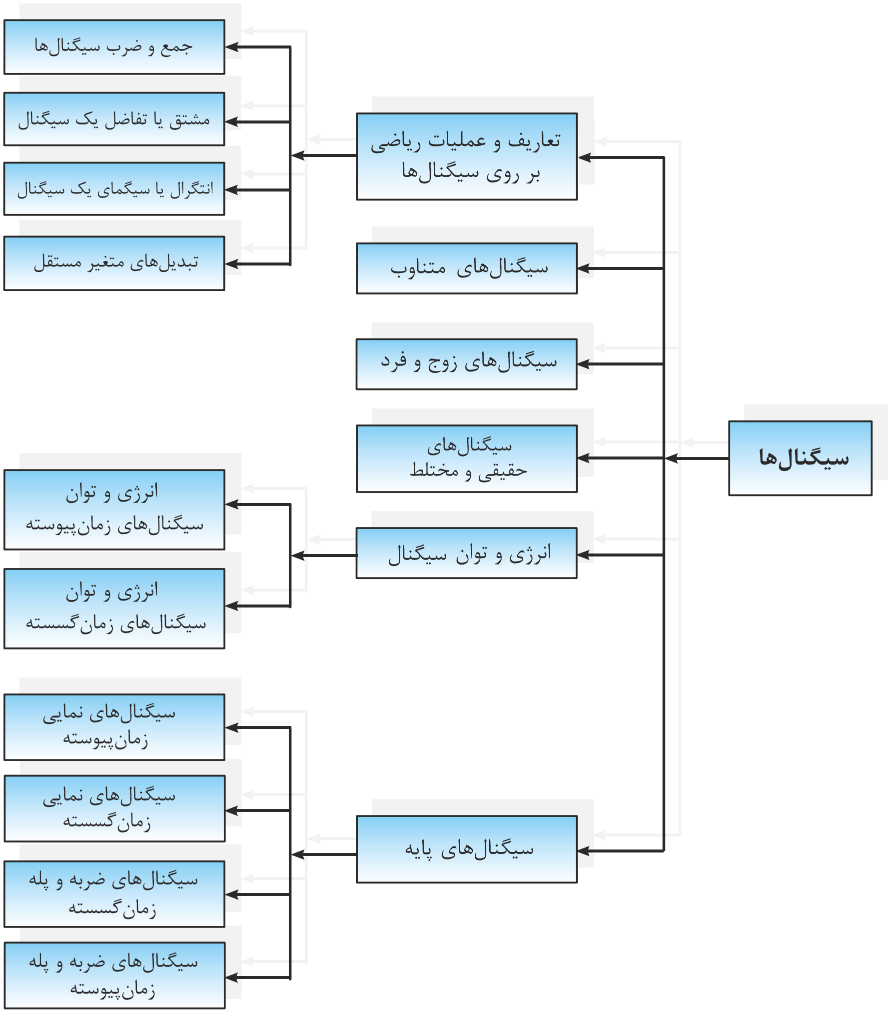
فصل اول

سیگنال‌ها



مقدمه

در این فصل به تعریف اجمالی سیگنال‌ها و مشخصات آن‌ها و همچنین به نحوه استفاده از آن‌ها به عنوان ابزاری مهم در مباحث پردازش سیگنال می‌پردازیم و تعدادی از سیگنال‌های مهم که در ادامه درس با آن‌ها سر و کار خواهیم داشت را معرفی می‌نماییم.[۱]

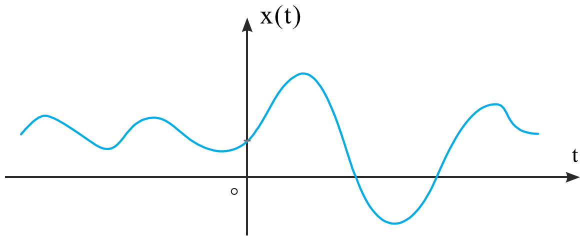
تعاریف و عملیات ریاضی بر روی سیگنال‌ها

تعریف سیگنال: سیگنال از لحاظ ریاضی، تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است؛[۲] اما در کاربردهای عملی، طبیعتاً سیگنال‌هایی برای ما اهمیت دارند که حاوی اطلاعاتی از یک فرایند فیزیکی و یا حتی اقتصادی و اجتماعی باشند؛ مانند سیگنال‌های مخابراتی، سیگنال‌های صوتی و تصویری، سیگنال‌های تغییرات شاخص‌های بورس و ... .

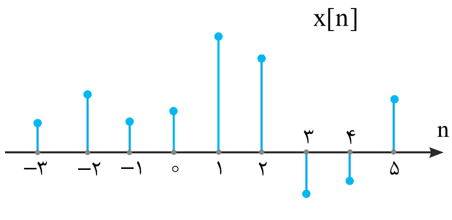
موضوع اصلی پردازش سیگنال، اِعمال تغییرات مورد نظر بر روی سیگنال‌ها و احیاناً استخراج اطلاعات و مؤلفه‌های مورد نظر از آن می‌باشد که ما در این درس بیشتر به مبانی و مقدمات ریاضی این مباحث خواهیم پرداخت.

سیگنال‌ها بسته به نوع متغیرِ مستقل خود در حالت کلی به دو دسته زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته تقسیم می‌شوند:

سیگنال زمان‌پیوسته (C.T):[۳] سیگنال زمان‌پیوسته، سیگنالی است که در همه زمان‌ها تعریف شده و دارای مقدار (هر چند صفر) می‌باشد. یعنی متغیر مستقل آن همه مقادیر حقیقی را به خود می‌گیرد. در این حالت معمولاً متغیر مستقل را با "t" نمایش می‌دهند. به عنوان نمونه، سیگنال زمان‌پیوسته $x(t)$ را در زیر ملاحظه می‌کنید:



سیگنال زمان‌گسسته (D.T):[۴] سیگنال زمان‌گسسته، سیگنالی است که فقط در لحظاتی گسسته (صحیح) از زمان تعریف می‌شود. یعنی متغیر مستقل آن فقط مقادیر صحیح به خود می‌گیرد. در این حالت معمولاً متغیر مستقل را با "n" نمایش می‌دهند. به عنوان نمونه، سیگنال زمان‌گسسته $x[n]$ را در شکل زیر ملاحظه می‌کنید. توجه داشته باشید که مقدار یک سیگنال زمان‌گسسته در حالت کلی هر چیزی می‌تواند باشد و تنها متغیر "n" لزوماً صحیح است.



[۱] برای داشتن بازدهی حداکثری از مطالعه این کتاب، اکیداً توصیه می‌شود قبل از شروع، **مقدمه کتاب** را به‌طور دقیق بخوانید و با توجه به توضیحات داده شده، روش مناسب خود برای مطالعه این کتاب را انتخاب نمایید.

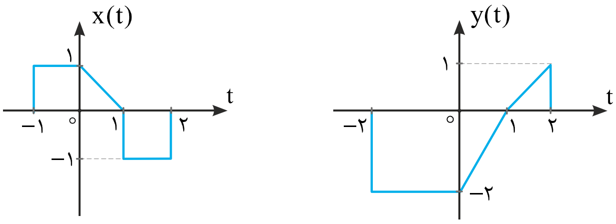
[۲] در این درس، متغیر مستقل ما معمولاً زمان است.

[3] Continuous Time

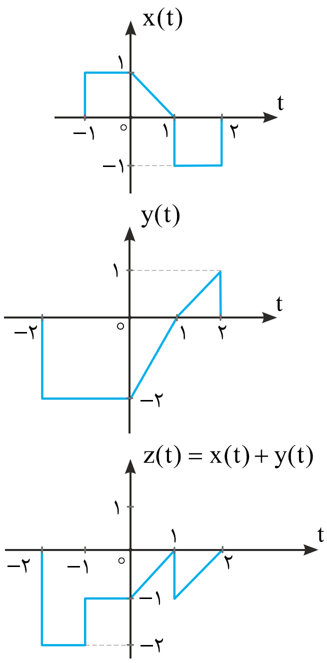
[4] Discrete Time

جمع و ضرب سیگنال‌ها

در بسیاری از مباحث این درس، نیاز است که شکل دو سیگنال را با هم جمع یا در هم ضرب نماییم. در این بخش، نحوه جمع و ضرب دو سیگنال را از روی شکل آن‌ها آموزش می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهیم دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ که در شکل زیر نشان داده شده‌اند را با هم جمع نماییم:

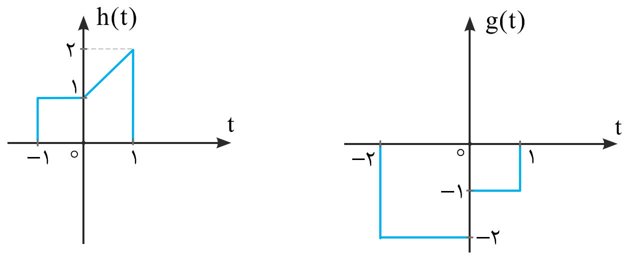


با فرض اینکه $z(t)=x(t)+y(t)$ باشد، مشخص است که $z(t)$ در هر لحظه $t_۰$ برابر $x(t_۰)+y(t_۰)$ می‌باشد. یعنی برای حاصل جمع دو شکل کافی است که دامنه‌های[1] (مقدارهای) آن‌ها را در هر لحظه، با هم جمع کنیم. بنابراین با رسم دو شکل $x(t)$ و $y(t)$ در زیر هم و جمع دامنه‌های آن‌ها شکل $z(t)=x(t)+y(t)$ به‌دست می‌آید. در لحظات $-۲<t<-۱$ دامنه $x(t)$ برابر صفر و دامنه $y(t)$ برابر -۲ می‌باشد. بنابراین حاصل جمع آن‌ها برابر -۲ خواهد بود. در لحظات $-۱<t<۰$ دامنه $x(t)$ برابر ۱ و دامنه $y(t)$ برابر -۲ است. پس حاصل جمع آن‌ها برابر -۱ می‌شود. در لحظات $۰<t<۱$، $x(t)$ و $y(t)$ تابع خطی هستند. از آنجا که جمع دو خط، برابر خط می‌شود، برای جمع دو خط، کافی است که نقاط ابتدا و انتهای آن‌ها را با هم جمع کرده و سپس دو نقطه حاصل را به هم وصل نماییم. $x(t)$ و $y(t)$ در لحظه $t=۰$ به ترتیب برابر ۱ و -۲ می‌باشند که حاصل جمع آن‌ها برابر -۱ می‌شود. از طرف دیگر $x(t)$ و $y(t)$ هر دو در لحظه $t=۱$ برابر صفر و حاصل جمع آن‌ها نیز برابر صفر می‌شود. حال دو نقطه به‌دست آمده در لحظات $t=۰,۱$ را به هم وصل می‌کنیم. در لحظات $۱<t<۲$ دامنه $x(t)$ برابر -۱ و $y(t)$ برابر یک خط می‌باشد که جمع این دو نیز برابر همان خط می‌باشد که تنها یک واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است (در واقع نقاط ابتدا و انتهای خط با -۱ جمع می‌شوند). در بقیه لحظات نیز هر دو سیگنال برابر صفر می‌باشند و حاصل جمع آن‌ها نیز صفر خواهد بود. در نتیجه حاصل جمع دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ برابر شکل $z(t)$ می‌باشد.

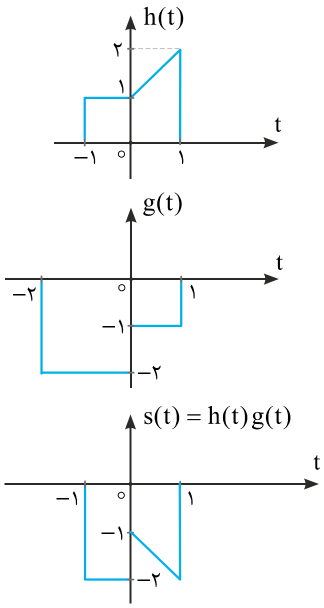


---
[1] در این درس، منظور از «دامنه سیگنال»، «مقدار سیگنال» است.

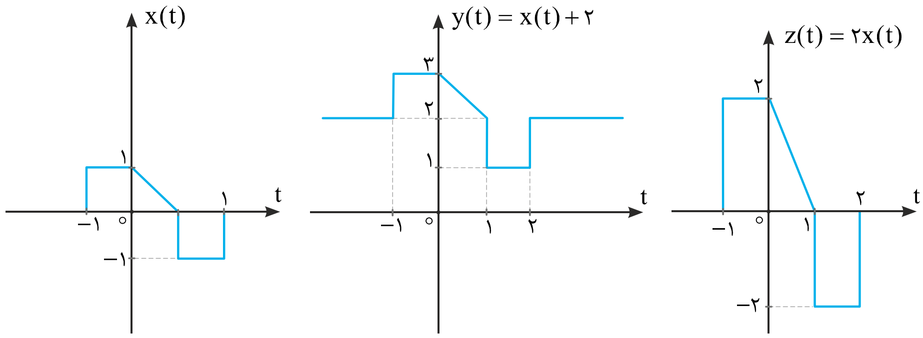
حال فرض کنید می‌خواهیم ضرب دو سیگنال $h(t)$ و $g(t)$ که در شکل زیر نشان داده شده‌اند را حساب نماییم:



با فرض اینکه $h(t)\cdot g(t)=s(t)$ باشد، مشخص است که $s(t)$ در هر لحظه $t_۰$ برابر $h(t_۰)\cdot g(t_۰)$ می‌باشد. یعنی برای حاصل ضرب دو شکل کافی است که دامنه‌های آن‌ها را در هر لحظه، در هم ضرب نماییم. بنابراین با رسم دو شکل $h(t)$ و $g(t)$ در زیر هم و ضرب دامنه‌های آن‌ها شکل $s(t)=h(t)\cdot g(t)$ به‌دست می‌آید. در لحظات $-۲<t<-۱$ دامنه $h(t)$ برابر صفر و دامنه $g(t)$ برابر -۲ می‌باشد. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها برابر صفر خواهد بود. در لحظات $-۱<t<۰$ دامنه $h(t)$ برابر ۱ و دامنه $g(t)$ برابر -۲ است. پس حاصل ضرب آن‌ها برابر -۲ می‌شود. در لحظات $۰<t<۱$، $h(t)$ یک خط و $g(t)$ برابر ثابت -۱ می‌باشد. ضرب خط در ثابت، برابر خط می‌شود. در نتیجه برای ضرب یک خط در یک ثابت، کافی است که نقاط ابتدا و انتهای خط را در آن مقدار ثابت ضرب کرده و سپس دو نقطه حاصل را به هم وصل نماییم. $h(t)$ و $g(t)$ در لحظه $t=۰$ به ترتیب برابر ۱ و -۱ می‌باشند که حاصل ضرب آن‌ها برابر -۱ می‌شود. از طرف دیگر $h(t)$ و $g(t)$ در لحظه $t=۱$ به ترتیب برابر ۲ و -۱ می‌باشند که حاصل ضرب آن‌ها برابر -۲ می‌شود. حال دو نقطه به‌دست آمده در لحظات $t=۰,۱$ را به هم وصل می‌کنیم. در بقیه لحظات نیز هر دو سیگنال برابر صفر می‌باشند و حاصل ضرب آن‌ها نیز برابر صفر خواهد بود. در نتیجه حاصل ضرب دو سیگنال $h(t)$ و $g(t)$ برابر $s(t)$ در شکل مقابل می‌باشد.



حال فرض کنید می‌خواهیم حاصل جمع یک سیگنال را با یک ثابت حساب کنیم. برای این کار کافی است که دامنه سیگنال را در همه لحظات با آن ثابت جمع نماییم.[۱] همچنین برای ضرب یک سیگنال در یک ثابت، کافی است که دامنه سیگنال را در همه لحظات در آن ثابت ضرب کنیم. به عنوان مثال در شکل زیر سیگنال $x(t)$ و $y(t)=x(t)+۲$ و همچنین $z(t)=۲x(t)$ را ملاحظه می‌کنید:



مشتق یا تفاضل یک سیگنال

در مباحث مختلف در این درس ممکن است به محاسبه مشتق یک سیگنال زمان‌پیوسته و یا محاسبه تفاضل یک سیگنال زمان‌گسسته از روی شکل آن‌ها برخورد کنیم. معمولاً این دو عبارت در حالت زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته معادل هم می‌باشند. منظور از $x'(t)$، مشتق سیگنال $x(t)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x'(t)=\lim_{\Delta\to ۰}\frac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to ۰}\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$$

توجه داشته باشید از آنجا که $\Delta\to ۰$ هم شامل ۰^{+} می‌شود و هم شامل ۰^{-}، دو تساوی فوق دقیقاً معادل هم هستند. مفهوم مشتق یک تابع به این معنی است که تغییرات تابع را در هر لحظه نسبت به تغییرات متغیر مستقل (که معمولاً زمان است) بررسی نماییم. در واقع Δ در تعریف مشتق، کوچکترین بازه زمانی ممکن در حالت زمان‌پیوسته می‌باشد. اگر بخواهیم معادل مفهوم فوق را در حالت زمان‌گسسته بیان کنیم، باید از تفاضل استفاده کنیم. تفاضل سیگنال زمان‌گسسته $x[n]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

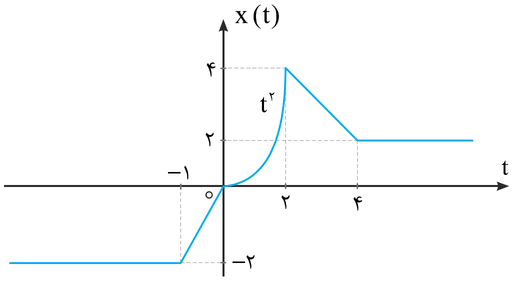
$$\nabla x[n]=x[n]-x[n-۱]$$

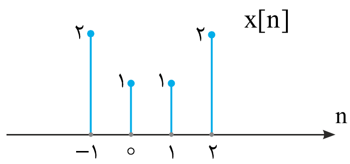
عبارت فوق نیز مانند مشتق، تغییرات یک تابع زمان‌گسسته نسبت به تغییرات متغیر مستقل (که معمولاً زمان است) را نشان می‌دهد؛ اما چون کوچک‌ترین بازه و تغییرات زمانی ممکن در حالت زمان‌گسسته برابر ۱ واحد می‌باشد، $\Delta=۱$ در نظر گرفته شده و فرمول مشتق به فرمول تفاضل تبدیل شده است. البته به‌طور دقیق‌تر به فرمول فوق، تفاضل پسرو گفته می‌شود که از فرمول تفاضل پیشرو که به‌صورت $x[n+۱]-x[n]$ تعریف می‌شود، متمایز گردد. ما در این درس معمولاً با تفاضل پسرو سر و کار داریم و هرگاه عبارت تفاضل یک سیگنال، به تنهایی به کار برده شد، منظور تفاضل پسرو می‌باشد.

[۱] در واقع در اینجا منظور از ثابت، سیگنال ثابت است.

مثال ۱

سیگنال $x(t)$ و $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



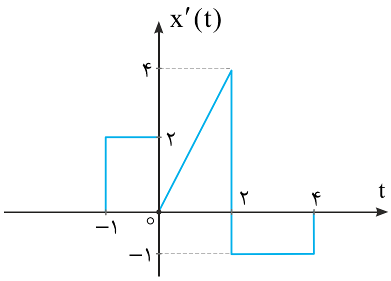


الف) **مقدار $x'(t)$ در $t=۱$ و $t=۳$ را محاسبه و همچنین شکل $x'(t)$ را به‌طور کامل رسم نمایید.**

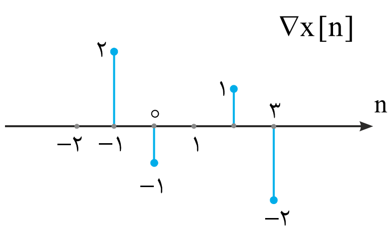
ب) **مقدار $\nabla x[n]$ در $n=۰$ و $n=۱$ را محاسبه و همچنین شکل $\nabla x[n]$ را به‌طور کامل رسم نمایید.**

حل:

الف) سیگنال $x(t)$ در بازه $t<-۱$ دارای مقداری ثابت می‌باشد، پس مشتق آن در این بازه برابر صفر خواهد بود. در بازه $-۱<t<۰$ یک خط با شیب ۲ داریم، پس مشتق آن در این بازه برابر ثابت ۲ خواهد بود. در بازه $۰<t<۲$ یک سهمی با فرمول $t^۲$ داریم، پس مشتق آن در این بازه برابر تابع $۲t$ خواهد بود که در لحظه $t=۱$ برابر ۲ می‌باشد. در بازه $۲<t<۴$ یک خط با شیب -۱ داریم، پس مشتق آن در این بازه برابر ثابت -۱ خواهد بود و در نتیجه در لحظه $t=۳$ هم برابر همان -۱ می‌باشد. $x(t)$ در بازه $t>۴$ دارای مقداری ثابت می‌باشد، پس مشتق آن در این بازه برابر صفر خواهد بود. بنابراین شکل $x'(t)$ به‌صورت مقابل می‌باشد.



ب) برای تعیین $\nabla x[n]=x[n]-x[n-۱]$، باید مقدار $x[n]$ را در هر لحظه، منهای مقدار آن در لحظه قبلش نماییم. $\nabla x[n]$ در لحظات $n\le -۲$ برابر صفر می‌شود، زیرا $x[n]$ و $x[n-۱]$ در این لحظات برابر صفر هستند. $x[n]$ در لحظه $n=-۱$ دارای مقدار ۲ و در لحظه $n=-۲$ دارای مقدار صفر است، پس $\nabla x[n]$ در لحظه $n=-۱$ برابر $\nabla x[-۱]=x[-۱]-x[-۲]=۲-۰=۲$ می‌شود. $x[n]$ در لحظه $n=۰$ دارای مقدار ۱ و در لحظه $n=-۱$ دارای مقدار ۲ است، پس $\nabla x[n]$ در لحظه $n=۰$ برابر $۱-۲=-۱$ می‌شود. $x[n]$ در لحظه $n=۱$ دارای مقدار ۱ و در لحظه $n=۰$ نیز دارای مقدار ۱ است، پس $\nabla x[n]$ در لحظه $n=۱$ برابر $۱-۱=۰$ می‌شود. $x[n]$ در لحظه $n=۲$ دارای مقدار ۲ و در لحظه $n=۱$ دارای مقدار ۱ است، پس $\nabla x[n]$ در لحظه $n=۲$ برابر $۲-۱=۱$ می‌شود. $x[n]$ در لحظه $n=۳$ دارای مقدار صفر و در لحظه $n=۲$ دارای مقدار ۲ است، پس $\nabla x[n]$ در لحظه $n=۳$ برابر $۰-۲=-۲$ می‌شود. از آنجا که $x[n]$ در لحظات $n\ge ۳$ دارای مقدار ثابت و یکسانی (در اینجا صفر) است، پس $x[n]$ و $x[n-۱]$ به‌ازای $n\ge ۴$ دارای مقدار یکسانی خواهند بود و در نتیجه مقدار $\nabla x[n]=x[n]-x[n-۱]$ به‌ازای $n\ge ۴$ برابر صفر به‌دست می‌آید. بنابراین شکل $\nabla x[n]$ به‌صورت مقابل می‌باشد.



انتگرال (مساحت) یا سیگمای (مجموع) یک سیگنال

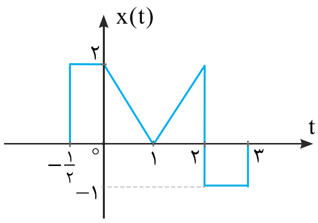
در مباحث مختلف در این درس ممکن است به انتگرال‌های معیّن نظیر $\int_{t_۱}^{t_۲} x(t)\,dt$ یا سیگماهای معیّن نظیر $\sum_{n=n_۱}^{n_۲} x[n]$ برخورد کنیم. منظور از $\int_{t_۱}^{t_۲} x(t)\,dt$ مساحت زیر نمودار سیگنال $x(t)$ از لحظه $t=t_۱$ تا لحظه $t=t_۲$ می‌باشد. همچنین به‌طور معادل منظور از $\sum_{n=n_۱}^{n_۲} x[n]$ مجموع مقادیر $x[n]$ از لحظه $n_۱$ تا $n_۲$ می‌باشد. یعنی داریم:

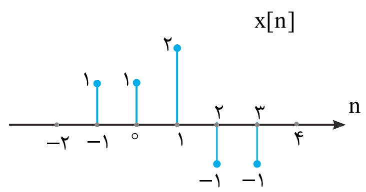
$$\sum_{n=n_۱}^{n_۲} x[n] = \begin{cases} x[n_۱]+x[n_۱+۱]+x[n_۱+۲]+\cdots+x[n_۲] & , \ n_۲ \ge n_۱ \\ x[n_۲]+x[n_۲+۱]+x[n_۲+۲]+\cdots+x[n_۱] & , \ n_۱ \ge n_۲ \end{cases}$$

معمولاً دو عبارت $\int_{t_۱}^{t_۲} x(t)\,dt$ و $\sum_{n=n_۱}^{n_۲} x[n]$ در حالت زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته معادل هم می‌باشند.[۱] گاهی اوقات حدود انتگرال (یا سیگما) اعداد ثابتی نیستند و تابعی از t (یا n) می‌باشند؛ در این صورت حاصل انتگرال یا سیگما نیز تابعی از t (یا n) خواهد بود. نحوه محاسبه این نوع انتگرال‌ها (یا سیگماها) با استفاده از رسم شکل اهمیت زیادی دارد و در مثال بعد توضیح داده خواهد شد.

مثال ۲

سیگنال زمان‌پیوسته $x(t)$ و سیگنال زمان‌گسسته $x[n]$ در شکل زیر مفروضند. حاصل انتگرال‌ها و سیگماهای داده شده را به‌دست آورید.





---

[۱] عبارت $\int_{t_۱}^{t_۲} x(t)\,dt$ که به معنای مساحت زیر نمودار سیگنال $x(t)$ از لحظه $t_۱$ تا $t_۲$ می‌باشد، در واقع مقدار سیگنال $x(t)$ را در هر لحظه t در dt (کوچکترین بازه زمانی ممکن در حالت زمان‌پیوسته) ضرب می‌کند و این کار را به‌ازای همه t ها از $t_۱$ تا $t_۲$ انجام می‌دهد و سپس همه عبارات به‌دست آمده را با هم جمع می‌نماید. در نتیجه این انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر با یک سیگما تقریب زد:

$$\int_{t_۱}^{t_۲} x(t)\,dt \simeq \sum_{i} x(t_i)\,\Delta$$

که t_i ها شامل همه لحظات t در بازه $t_۱$ تا $t_۲$ می‌شود که با فاصله $\Delta \to ۰$ از هم قرار دارند. حال اگر بخواهیم عبارت فوق را در حالت زمان‌گسسته معادل‌سازی کنیم، باید $\Delta = ۱$ در نظر بگیریم، زیرا کوچکترین بازه زمانی ممکن در حالت زمان‌گسسته، ۱ می‌باشد. بنابراین معادل انتگرال فوق در حالت زمان‌گسسته به‌صورت $\sum_{n=n_۱}^{n_۲} x[n]$ خواهد بود که n شامل همه لحظات در بازه $n_۱$ تا $n_۲$ می‌شود که با فاصله $\Delta = ۱$ از هم قرار دارند.

الف) حاصل انتگرال‌های $A=\int_{0}^{3} x(t)\,dt$ **و** $B=\int_{1}^{-2} x(t)\,dt$ **را محاسبه کنید.**

ب) حاصل سیگماهای $C=\sum_{n=-1}^{2} x[n]$ **و** $D=\sum_{n=3}^{-2} x[n]$ **را محاسبه نمایید.**

ج) اگر $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ **باشد،** $y[n]$ **را محاسبه و رسم کنید.**

د) اگر $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ **باشد،** $y(t)$ **را محاسبه و رسم نمایید.**

حل:

الف) برای محاسبه انتگرال A باید مساحت سیگنال $x(t)$ را از لحظه $t=0$ تا لحظه $t=3$ حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

$$A=\int_{0}^{3} x(t)\,dt=\frac{2\times 1}{2}+\frac{2\times 1}{2}-(1\times 1)=1$$

دقت کنید که مساحت شکلِ زیر محور افقی، منفی است.

برای محاسبه انتگرال B باید مساحت سیگنال $x(t)$ را از لحظه $t=1$ تا لحظه $t=-2$ حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

$$B=\int_{1}^{-2} x(t)\,dt=-\left(\frac{2\times 1}{2}+2\times\frac{1}{2}\right)=-2$$

دقت کنید با توجه به اینکه حد بالای انتگرال از حد پایین کوچکتر است، مساحت شکل را باید از راست به چپ حساب کنیم که به همین دلیل در یک منفی نیز ضرب می‌شود.[1] وجود این منفی را می‌توان با جابه‌جایی حدود انتگرال نیز نشان داد. یعنی داریم:

$$B=\int_{1}^{-2} x(t)\,dt=-\int_{-2}^{1} x(t)\,dt=-\left(\frac{2\times 1}{2}+(2\times\frac{1}{2})\right)=-2$$

ب) برای محاسبه سیگمای C باید مجموع مقادیر $x[n]$ را از لحظه $n=-1$ تا لحظه $n=2$ حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

$$C=\sum_{n=-1}^{2} x[n]=1+1+2-1=3$$

برای محاسبه سیگمای D باید مجموع مقادیر $x[n]$ را از لحظه $n=3$ تا لحظه $n=-2$ حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

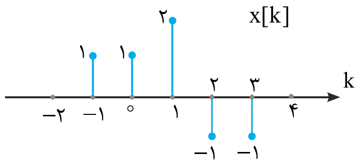
$$D=\sum_{n=3}^{-2} x[n]=-1-1+2+1+1+0=2$$

دقت کنید که در سیگما، چه از راست به چپ و چه از چپ به راست مجموع مقادیر سیگنال را حساب نماییم، تفاوتی نمی‌کند و بر خلاف انتگرال، در اینجا نیازی به ضرب منفی نیست. در واقع در سیگما، می‌توان حدود را جابه‌جا کرد بدون اینکه حاصل سیگما در یک منفی ضرب شود.

---

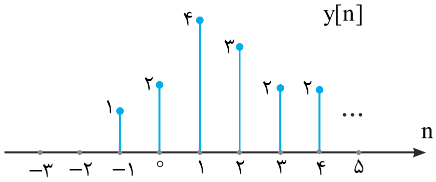
[1] در واقع مقدار مساحت هر شکل، از راست به چپ، برابر منفی مساحت آن از چپ به راست است.

ج) برای محاسبه $y[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k]$ باید مجموع مقادیر $x[k]$ از $k=-\infty$ تا $k=n$ را به‌ازای n های مختلف حساب کنیم. برای این کار ابتدا باید شکل $x[k]$ را رسم نماییم:[1]



مثلاً برای محاسبه $y[n]$ در لحظه $n=۱$، باید مقدار $y[۱]=\sum\limits_{k=-\infty}^{۱} x[k]$ یعنی مجموع مقادیر شکل $x[k]$ را از $k=-\infty$ تا $k=۱$ حساب کنیم که با توجه به شکل فوق برابر ۴ می‌شود. یا برای محاسبه $y[n]$ در لحظه $n=۲$، باید مقدار $y[۲]=\sum\limits_{k=-\infty}^{۲} x[k]$ یعنی مجموع مقادیر شکل $x[k]$ را از $k=-\infty$ تا $k=۲$ حساب نماییم که برابر ۳ می‌شود؛ و به همین ترتیب برای محاسبه $y[n]$ در لحظه $n=n_۰$، باید مقدار $y[n_۰]=\sum\limits_{k=-\infty}^{n_۰} x[k]$ یعنی مجموع مقادیر شکل $x[k]$ را از $k=-\infty$ تا $k=n_۰$ حساب کنیم و سپس شکل $y[n]$ را به‌ازای n های مختلف رسم نماییم. $y[n]$ به‌ازای $n\le -۲$ برابر صفر می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل $x[k]$ از $k=-\infty$ تا $k\le -۲$ برابر صفر است. $y[n]$ به‌ازای $n=-۱$ برابر ۱ می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل $x[k]$ از $k=-\infty$ تا $k=-۱$ برابر ۱ است. $y[n]$ به‌ازای $n=۰$ برابر ۲ می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل $x[k]$ از $k=-\infty$ تا $k=۰$ برابر ۲ است. $y[n]$ به‌ازای $n=۱,۲$ نیز به ترتیب برابر ۴ و ۳ می‌شود؛ و در آخر، $y[n]$ به‌ازای $n\ge ۳$ برابر ۲ می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل $x[k]$ از $k=-\infty$ تا $k\ge ۳$ برابر ۲ است.

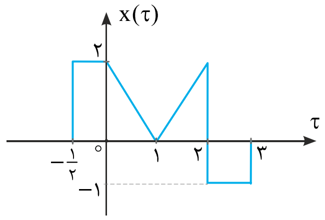
حال شکل $y[n]$ را به‌ازای n های مختلف رسم می‌کنیم:



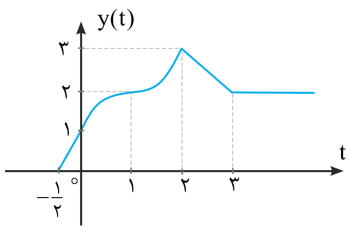
البته ما در اینجا $y[n]$ را با توضیحات مفصل و قدم به قدم محاسبه کردیم، اما شما باید سعی کنید این محاسبات را به‌صورت ذهنی انجام دهید.

[1] دقت کنید که حاصل سیگما در اینجا تابعی از n است. در واقع k متغیر داخلی سیگماست و بعد از محاسبه سیگما، حذف می‌شود و n متغیر بیرونی سیگماست که بعد از محاسبه سیگما باقی می‌ماند.

د) برای محاسبه $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$ باید مساحت $x(\tau)$ را از $\tau=-\infty$ تا $\tau=t$ را به‌ازای t های مختلف حساب کنیم. برای این کار ابتدا باید شکل $x(\tau)$ را رسم نماییم:[1]



مثلاً برای محاسبه $y(t)$ در لحظه $t=1$، باید مقدار $y(1)=\int_{-\infty}^{1}x(\tau)\,d\tau$ یعنی مساحت شکل $x(\tau)$ را از $\tau=-\infty$ تا $\tau=1$ حساب کنیم که با توجه به شکل فوق برابر ۲ می‌شود؛ یا برای محاسبه $y(t)$ در لحظه $t=2$، باید مقدار $y(2)=\int_{-\infty}^{2}x(\tau)\,d\tau$ یعنی مساحت شکل $x(\tau)$ را از $\tau=-\infty$ تا $\tau=2$ حساب نماییم که برابر ۳ می‌شود؛ و به همین ترتیب برای محاسبه $y(t)$ در لحظه $t=t_0$، باید مقدار $y(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0}x(\tau)\,d\tau$ یعنی مساحت شکل $x(\tau)$ را از $\tau=-\infty$ تا $\tau=t_0$ حساب کنیم و سپس شکل $y(t)$ را به‌ازای t های مختلف رسم نماییم. $y(t)$ به‌ازای $t<-\frac{1}{2}$ برابر صفر می‌شود، زیرا مساحت شکل $x(\tau)$ از $\tau=-\infty$ تا $\tau<-\frac{1}{2}$ برابر صفر است. با افزایش t از $-\frac{1}{2}$ تا ۰، مساحت شکل فوق از $\tau=-\infty$ تا $\tau=t$ به‌صورت خطی زیاد می‌شود، پس $y(t)$ به‌صورت خطی افزایش می‌یابد (زیرا در $x(\tau)$ یک ثابت مثبت داریم و انتگرال ثابت مثبت برابر خط با شیب مثبت می‌شود). $y(t)$ به‌ازای $t=0$ برابر مساحت شکل $x(\tau)$ از $\tau=-\infty$ تا $\tau=0$ می‌باشد که برابر ۱ خواهد بود. با افزایش t از ۰ تا ۱، مقدار $y(t)$ (مساحت شکل فوق از $\tau=-\infty$ تا $\tau=t$) به‌صورت یک سهمی با تقارن رو به پایین افزایش می‌یابد (زیرا در $x(\tau)$ یک خط با شیب منفی داریم و انتگرال خط با شیب منفی، یک سهمی با تقارن رو به پایین می‌باشد).[2] $y(t)$ به‌ازای $t=1$ نیز برابر ۲ می‌شود. با افزایش t از ۱ تا ۲، مقدار $y(t)$ به‌صورت یک سهمی با تقارن رو به بالا افزایش می‌یابد (زیرا در $x(\tau)$ یک خط با شیب مثبت داریم و انتگرال خط با شیب مثبت، یک سهمی با تقارن رو به بالا می‌باشد).[3] $y(t)$ به‌ازای $t=2$ نیز برابر ۳ می‌شود. با افزایش t از ۲ تا ۳، مساحت شکل فوق از $\tau=-\infty$ تا $\tau=t$ به‌صورت خطی کم می‌شود، پس $y(t)$ به‌صورت خطی کاهش می‌یابد، (زیرا در $x(\tau)$ یک ثابت منفی داریم و انتگرال ثابت منفی برابر خط با شیب منفی می‌شود). $y(t)$ به‌ازای $t>3$ نیز برابر ثابت ۲ می‌شود، زیرا مساحت شکل $x(\tau)$ از $\tau=-\infty$ تا $\tau>3$ برابر ۲ است. حال شکل $y(t)$ را به‌ازای t های مختلف رسم می‌کنیم.



---

[1] دقت کنید که حاصل انتگرال در اینجا تابعی از t است. در واقع τ متغیر داخلی انتگرال است و بعد از محاسبه انتگرال، حذف می‌شود و t متغیر بیرونی انتگرال است که بعد از محاسبه انتگرال باقی می‌ماند.

[2] دلیل دیگری که می‌توان برای این موضوع ذکر کرد این است که چون خط به سمت پایین است، سرعت زیاد شدن مساحت، در حال کم شدن است و بنابراین جهت تقعر به سمت پایین خواهد بود.

[3] دلیل دیگری که می‌توان برای این موضوع ذکر کرد این است که چون خط به سمت بالا است، سرعت زیاد شدن مساحت، در حال زیاد شدن است و بنابراین جهت تقعر به سمت بالا خواهد بود.

در بسیاری از بخش‌های این درس، با عملیاتی به نام تغییر متغیر انتگرال معین روبه‌رو می‌شویم که بسیاری از دانشجویان در این زمینه مشکل دارند. توصیه می‌شود مثال زیر را با دقت مطالعه و همواره از همین روش برای بازنویسی انتگرال بعد از تغییر متغیر، استفاده نمایید.

مثال ۳

انتگرال $I=\int_{-\infty}^{t+3} x(-2\tau+1)\,d\tau$ را با اِعمال تغییر متغیر $\alpha=-2\tau+1$ ساده نمایید.

حل:

با فرض $\alpha=-2\tau+1$ و دیفرانسیل‌گیری از دو طرف تساوی داریم:

$$-2\tau+1=\alpha \quad\Rightarrow\quad -2d\tau=d\alpha \quad\Rightarrow\quad d\tau=-\frac{1}{2}d\alpha$$

حال باید تغییر متغیر را در حدود انتگرال نیز اعمال نماییم. حدود انتگرال برای متغیر τ بیان شده است و ما باید حدود جدید را برای متغیر $\alpha=-2\tau+1$ به‌دست آوریم. برای این کار، یک‌بار در تساوی $\alpha=-2\tau+1$ به جای τ، حد پایین انتگرال را قرار می‌دهیم که $\alpha=-2(-\infty)+1=+\infty$ می‌شود و بار دیگر به جای τ، حد بالای انتگرال را جایگذاری می‌کنیم که $\alpha=-2(t+3)+1=-2t-5$ خواهد شد. بنابراین داریم:

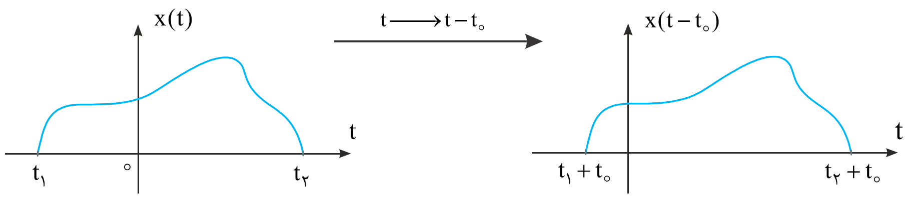
$$I=\int_{-\infty}^{t+3} x(-2\tau+1)\,d\tau=\int_{+\infty}^{-2t-5} x(\alpha)\left(-\frac{1}{2}d\alpha\right)=\frac{1}{2}\int_{-2t-5}^{+\infty} x(\alpha)\,d\alpha$$

دقت کنید که ضریب منفی را با جابه‌جایی حدود، خنثی کردیم.

تبدیل‌های متغیر مستقل

منظور از تبدیل‌های متغیر مستقل، تبدیل‌هایی است که بر متغیر مستقل t (یا n) اِعمال می‌شود. ما در اینجا سه نوع تبدیل پایه (انتقال زمانی، وارونگی زمانی و مقیاس‌دهی زمانی) که در این درس به وفور با آن‌ها سر و کار خواهیم داشت را معرفی می‌نماییم. دقت کنید که این تبدیل‌ها صرفاً روی متغیر مستقل t اعمال می‌شوند نه آرگومان سیگنال.[1]

انتقال زمانی: اگر در یک سیگنال زمان‌پیوسته، متغیر مستقل "t" را به "$t-t_0$" تبدیل کنیم، سیگنال به اندازه t_0 روی محور زمان جابجا می‌شود. اگر $t_0>0$ باشد سیگنال به سمت راست و اگر $t_0<0$ باشد سیگنال به سمت چپ انتقال می‌یابد. به عبارت دیگر در این تبدیل، همه مقیاس‌های زمانی در نمودار سیگنال، با t_0 جمع می‌شوند:



از روی شکل مشخص است که اگر $t_0>0$ باشد، سیگنال به سمت راست و اگر $t_0<0$ باشد، سیگنال به سمت چپ انتقال پیدا خواهد کرد. در حالت زمان‌گسسته نیز عبارات مشابهی وجود دارد.

[1] منظور از آرگومان سیگنال، عبارتی است که داخل پرانتز قرار می‌گیرد. مثلاً سیگنال $x(2t+1)$ را در نظر بگیرید. آرگومان این سیگنال برابر $2t+1$ می‌باشد، اما متغیر مستقل آن همان t است.