مقدمه مؤلف

«سپاس خداوندی که سخنوران از ستودن او عاجزند، و حسابگران از شمارش نعمتهای او نـاتوان، و تلاشـگران از ادای حق او درمانده‌اند، خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفات او حد و مرزی وجود ندارد، و تعریف کاملی نمی‌توان یافت و برای خـدا وقتی معین، و سرآمدی مشخص نمی‌توان تعیین کرد ...»[۱]

درس «تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها» که در کنکور کارشناسی ارشد مهندسـی بـرق بـا نـام «تجزیـه و تحلیل سیستم‌ها» و احتمالاً در بین عموم دانشجویان با نام «سیگنال» شناخته شده است، ویژگی‌هـای منحصـر به‌فردی نسبت به بقیه دروس منتخب برای آزمون کارشناسی ارشد دارد و نیـاز اسـت کـه بـه آن توجـه ویـژه‌ای صورت گیرد. گذشته از اینکه کاربرد این درس و مفاهیم آن در گرایش مخـابرات سیسـتم بـیش از سـایر دروس است و در گرایش‌های مهندسی پزشکی و کنترل نیز جایگاه ویژه‌ای دارد، می‌تـوان بـا سـرمایه‌گـذاری مناسـب و صحیح روی آن، در آزمون کنکور نیز از مزایا و تأثیر قابل توجـه آن اسـتفاده نمـود. علیـرغم سـادگی ایـن درس نسبت به بقیه دروس کنکور، بسیاری از داوطلبین کنکور کارشناسی ارشد، نمی‌توانند نتیجـه قابـل قبـولی از آن دریافت کنند و در بسیاری از مواقع، تعداد اشتباهات زیاد داوطلبان در حل تست‌های این درس باعـث مـی‌شـود نتیجه غیر قابل انتظاری برای آن‌ها رقم بخورد؛ بسیاری از تست‌هـای ایـن درس، ظـاهراً سـاده امـا دارای نکـات ظریفی هستند که ندانستن آن نکات، نه به پاسخ ندادن تست، بلکه به پاسخ دادن اشتباه تست منجر خواهد شد؛ زیرا در بسیاری از اوقات، پاسخ‌های نادرست احتمالی داوطلبین نیز در گزینه‌ها وجـود دارد. بنـابراین بایـد زمـان مناسبی برای یادگیری دقیق مفاهیم و نکات این درس صرف نمود. در کتـاب حاضـر سـعی شـده اسـت تمـامی مفاهیم و نکات مورد نیاز برای تسلط کامل شما و کسب نمره بسیار خوب در این درس، به طور کامل و بـا زبـانی گویا به همراه تست‌ها ومثال‌های متنوع ارائه شود.

ویژگی‌های کلی کتاب

بیان کامل درس به همراه مفاهیم مورد نیاز:

در این کتاب فرض بر این بوده است که خواننده فقط با ریاضیات مقدماتی (مشـتق، انتگـرال و ...) آشـنایی کلـی دارد. بنابراین متن درس به طور کامل و از پایه ارائه شده است. بسیاری از مفاهیم بیان‌شده در کتاب، اختصاصـی و منحصر به فرد است و به بسیاری از ابهامات در مورد مفاهیم پایه‌ای پاسخ می‌دهد و احتمالاً در آرامـش ذهنـی شما برای یادگیری مطالب دیگر درس، تأثیر به‌سزایی خواهد داشت. ضمناً این کتاب به عنوان یک کتاب درسـی کامل برای گذراندن درس سیگنال در دانشگاه نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در واقع اگرچه این کتاب، در مجموعه کتاب‌های کنکوری انتشار یافته است، اما هدف آن صرفاً کنکور نیست و بسیاری از مفـاهیمی کـه مـورد نیاز یک مهندس برق می‌باشد (البته بدون زیاده‌گویی و اضافات)، در این کتاب ارائه شده است و ان شـاء الله بعـد از مطالعه کتاب، کاملاً به این درس و همچنین زمینه پردازش سیگنال که یکی از کـاربردی‌تـرین و جـذاب‌تـرین زمینه‌های رشته مهندسی برق می‌باشد، علاقه‌مند خواهید شد.

---

[۱] نهج البلاغه ـ خطبه اول ـ ترجمه محمد دشتی

حل تشریحی تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد از ابتدا تاکنون:

تست‌های کنکورهای سراسری و آزادی که در دسترس بوده‌اند، در انتهای فصل‌های کتاب، به‌طور دقیـق و کـاملاً تشریحی حل شده‌اند.[1] در جلد دوم کتاب نیز بسیاری از تست‌هـای مهـم آزمـون دکتـری (مخـابرات سیسـتم) و وزارت بهداشت (مهندسی پزشکی) ارائه شده است که به همه داوطلبین در همه آزمون‌ها توصیه می‌گـردد همـه آن‌ها را مطالعه نمایند، زیرا تفاوت چندانی از لحاظ محتوایی و سطح علمی بین آن‌ها وجود ندارد.

یکی از فاکتورهای مهم در حل یک تست، ارائه یک روش کلی و سرراست و در عین حال ساده و کوتاه می‌باشـد، به‌طوری‌که بتوان تست‌های مشابه را نیز با همان روش به‌راحتی حل نمود. بنابراین در حـل تسـت‌هـا و مثـال‌هـا سعی شده است تا حد امکان، از این نوع روش‌ها استفاده شود تا دانشجو بدون نیاز به روش‌های ابتکاری (کـه در جلسه کنکور تقریباً غیرممکن است که به ذهن داوطلب برسد)، بتوانـد یـک تسـت را بـا آرامـش کامـل و بـدون اضطراب حل کند. البته این به معنای آن نیست که روش‌های ارائـه شـده، روش‌هـای تسـتی نیسـتند. امـا روش تستی، باید طوری باشد که در صورت تغییر گزینه‌ها و تغییرات اندک در تست نیز قابل استفاده باشد. روشی کـه به گزینه‌ها وابستگی مستقیم داشته باشد و فقط برای یک تست خاص ارائه شود، روش سودمندی نخواهد بـود و احتمالاً چنین روش‌هایی هیچ‌گاه در جلسه کنکور به ذهن شما نخواهد رسید.

نحوه مناسب بیان نکات:

درس سیگنال، جزء دروسی است که نکات و فرمول‌های زیادی دارد. اگرچه شاید بدون دانستن بعضی از نکـات و فرمول‌ها نیز بتوان مسائل این درس را حل کرد، اما برای سرعت عمل و کاهش محاسبات و همچنین آرامـش در جلسه کنکور و کشف ایده به‌کار گرفته شده در یک تست، باید تـا حـد امکـان، نکـات و فرمـول‌هـا را بـه خـاطر بسپارید. در این کتاب تقریباً برای هر نکته، هم توضیح متنی و هم توضیحات به صورت بلوکی (با رنگ آبی) داده شده است تا به یادگیری و حفظ کردن آن‌ها کمک کند. توصیه می‌گردد فرمول‌هایی که بـا رنـگ آبـی مشـخص شده‌اند را نیز به خاطر بسپارید. به هر حال بسیاری از نکات و فرمول‌های بیان شده، اثبـات شـده‌انـد و پیشـنهاد می‌شود اثبات‌ها را نیز مطالعه کرده و یاد بگیرید؛ زیرا گاهی اوقات، روش‌ها و مفاهیم بیان‌شده در اثبـات نکـات و فرمول‌ها، در حل بعضی از تست‌های کنکور مفید واقع می‌شوند و همچنین یادگیری این اثبات‌ها به حفظ کـردن نکات و فرمول‌های مربوطه، کمک فراوانی می‌کند. البته به دانشجویان علاقه‌مند و خوانندگانی که خواهان تسـلط بیشتر بر روی مفاهیم درس هستند، توصیه می‌شود برای دریافت اثبات‌هـایی کـه از اهمیـت کمتـری برخـوردار بوده‌اند، به سایت مؤلف که در انتهای همین قسمت معرفـی خواهـد شـد، مراجعـه نماینـد. از آنجـا کـه در حـل بسیاری از تست‌ها، به نکات مربوطه با ذکر شماره نکته اشاره شـده اسـت، بـرای دسترسـی سـریع بـه نکـات، در پیوست کتاب نیز مجدداً همه این نکات به‌طور خلاصه ارائه شده‌اند.

موضوع‌بندی منحصربه‌فرد کتاب:

یکی از پیچیدگی‌هایی که در درس سیگنال وجود دارد، نکات، فرمول‌ها و مطالب مشابه در بخش‌های مختلف اسـت که معمولاً موجب سردرگمی دانشجویان می‌گردد. برای حل این مشـکل، عنـاوین و موضـوعات ایـن کتـاب، طـوری مرتب شده‌اند که تا حد امکان، مطالب مشابه و وابسته، به صورت یک‌جا و در کنار هم بیان شوند تا به انسجام ذهنی

---

[1] البته تعدادی از تست‌های نادرست یا تکراری یا ... که اکثراً نیز از آزمون دانشگاه آزاد بوده‌اند، به دلیل بی‌اهمیت بودن، حذف شده‌اند. در برخی تست‌ها نیز اصلاحات یا تغییرات مورد نیاز به‌طوری که به محتوای تست، لطمه‌ای وارد نشود، اِعمال شده است.

خواننده در یادگیری مطالب کمک کند. به همین دلیل فهرست و عناوین این کتاب با بقیه کتب مربوط به درس سیگنال، به طور کلی متفاوت است. همین موضوع باعث شده است که حجم کتاب و به تبع آن احتمالاً زمان مورد نیاز شما برای یادگیری مطالب، به‌طور چشم‌گیری کاهش یابد. به عنوان مثال، روش‌های تحلیل سیستم‌های LTI در دو حوزه زمان و فرکانس و خواص آن‌ها، به صورت یک‌جا بیان شده است و یا تبدیل فوریه و سری فوریه در دو حالت زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته به دلیل شباهت‌های زیاد آن‌ها، در کنار هم معرفی و بررسی شده‌اند.

مطالب این کتاب به دو قسمت متوسط و پیشرفته در دو جلد جداگانه تفکیک شده است. جلد اول شامل مطالب پایه‌ای و متوسط است که طبق براورد صورت گرفته از سؤالات سال‌های اخیر کنکور ارشد ، در صورت تسلط کامل روی آن، ان شاء الله می‌توان حداقل درصد ۴۰ تا ۶۰ را در آزمون ارشد کسب نمود. جلد دوم نیز شامل مباحث پیشرفته و تست‌های تألیفی است که با مطالعه و یادگیری کامل آن، به امید خدا می‌توان به درصد ۱۰۰ نیز رسید. تفکیک کتاب به دو سطح متوسط و پیشرفته در دو جلد جداگانه دو مزیت عمده دارد؛ اولاً افرادی که به علت کمبود وقت و یا دلایل دیگر، قصدی برای کسب درصد بالا در این درس در آزمون کنکور ندارند، می‌توانند صرفاً جلد اول را تهیه کرده و بدون از دست دادن پیوستگی مطالب و صرف هزینه اضافه، به هدف خود دست یابند. ثانیاً دانشجویانی که خواهان تسلط کامل بر روی این درس و کسب بالاترین درصد در آزمون کنکور هستند و تمایل به مطالعه هر دو جلد کتاب دارند، به‌طور خودکار از روش مطالعه دو مرحله‌ای استفاده خواهند کرد. روش مطالعه دو مرحله‌ای که جزء بهترین روش‌های مطالعه است، به این معنی است که برای یادگیری و تسلط کامل بر روی یک درس، در مرحله اول، صرفاً کلیات و مطالب پایه‌ای و مهم‌تر درس فرا گرفته می‌شود، و سپس در مرحله دوم به همراه مرور مطالب مرحله اول، وارد جزئیات و مطالب پیشرفته‌تر شده و به تسلط کامل بر روی درس می‌رسیم. البته روش پیشنهادی مؤلف برای مطالعه این کتاب، در قسمت‌های بعد به‌طور دقیق بیان خواهد شد.

معرفی فصل‌های کتاب

این مجموعه، شامل دو جلد و ۱۷ = ۸ + ۹ فصل می‌باشد که متن هر فصل، شامل تعداد زیادی مثال بوده و تست‌های کنکور نیز در انتهای فصول ارائه شده است. در انتهای فصول دهم تا هفدهم نیز بعد از تست‌های کنکور، تست‌های تألیفی نیز آورده شده و سعی شده است که از مسائل مرجع اصلی درس سیگنال یعنی کتاب آلن اپنهایم یا ایده‌های خوب و مهم آن‌ها نیز در این تست‌ها استفاده شود و بنابراین نیازی به مطالعه جداگانه مسائل آن کتاب نخواهد بود. همچنین از آزمون‌های آزمایشی سال‌های گذشته مؤسسه نصیر نیز در طراحی تست‌های تألیفی کمک گرفته شده است؛ البته بسیاری و شاید اکثر این تست‌ها با صرف وقت و تلاش فراوان، توسط مؤلف طراحی شده و حاوی نکات و ایده‌های جالب و جدیدی می‌باشند. در فصل‌های دهم تا شانزدهم نیز بعد از تست‌های تألیفی، تعدادی تست خودآزمایی به همراه کلید سؤالات، ارائه شده است که برای دریافت پاسخ تشریحی آن‌ها می‌توانید به سایت مؤلف مراجعه نمایید.

فصل اول به معرفی انواع سیگنال‌ها و نحوه کار کردن با آن‌ها اختصاص دارد. در فصل دوم به تعریف سیستم و معرفی انواع سیستم‌ها و بررسی خواص آن‌ها خواهیم پرداخت. در فصل سوم، ضمن تعریف انتگرال و جمع کانولوشن، دسته مهمی از سیستم‌ها به نام سیستم‌های LTI (خطی تغییرناپذیر با زمان) را در حوزه زمان بررسی می‌کنیم. البته در این فصل سیستم‌های خطی را نیز معرفی خواهیم نمود. در انتها نیز با توابع ویژه (مشتقات و انتگرال‌های سیگنال ضربه) آشنا خواهیم شد. در فصل چهارم، مفهوم فرکانس و حوزه فرکانس را مطرح خواهیم

کرد و سپس به طور مختصر، سری فوریه و تبدیل فوریه را معرفی می‌کنیم. فصل چهارم، یک فصل مفهومی است و از آن به طور خاص، تستی در کنکور مطرح نشده است، ولی برای یادگیری و درک بهتر فصل‌های بعد، از اهمیت زیادی برخوردار است. در فصل پنجم به تعریف تبدیل فوریه زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته در کنار هم خواهیم پرداخت. در کتب مختلف، تبدیل فوریه معمولاً بعد از سری فوریه مطرح می‌شود، اما به دلیل اینکه در فصل چهارم، سری فوریه به طور مختصر معرفی شده و همچنین به علت سادگی بیشتر فرمول‌ها، خواص و محاسبات تبدیل فوریه نسبت به سری فوریه، در این کتاب ابتدا تبدیل فوریه عنوان شده است. تبدیل فوریه زمان‌پیوسته و تبدیل فوریه زمان‌گسسته شباهت‌های زیادی با هم دارند، بنابراین بررسی آن‌ها در کنار هم می‌تواند به یادگیری و انسجام ذهنی شما کمک کند. فصل ششم نیز به سری فوریه زمان‌پیوسته و سری فوریه زمان‌گسسته اختصاص دارد که مانند تبدیل فوریه، در کنار هم بررسی شده‌اند. در فصل هفتم و هشتم نیز به ترتیب به تبدیل لاپلاس و تبدیل $\mathscr{Z}$ پرداخته شده است. فصل نهم که مهم‌ترین فصل جلد اول کتاب است، ماحصل فصل‌های قبل می‌باشد و شاید بتوان گفت که به طور متوسط بیشترین سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهد. در این فصل به کاربرد حوزه فرکانس (سری فوریه، تبدیل فوریه، لاپلاس و $\mathscr{Z}$) در تحلیل سیستم‌های LTI و خواص آن‌ها خواهیم پرداخت و در واقع بررسی همه این‌ها در کنار هم صورت خواهد گرفت تا درک بهتری از این مطالب به‌دست آید. در جلد دوم به بیان مطالب تکمیلی و پیشرفته‌تر خواهیم پرداخت. فصل‌های دهم تا پانزدهم، مطالب پیشرفته‌تر فصول جلد اول و تست‌های دشوارتر کنکور و همچنین تست‌های تألیفی را شامل می‌شود. فصل شانزدهم با عنوان «شناسایی سیستم‌ها و خواص آن‌ها»، فصلی جذاب و حاوی مطالب جالبی است که بسیاری از ایده‌های بیان شده، کاملاً اختصاصی و منحصر به این کتاب می‌باشد. در این فصل، سعی کردیم از دریچه‌ای جدید به بعضی از تست‌های مفهومی و بعضاً بسیار سخت کنکور پرداخته و دشوارترین سؤالات را با نگاهی ویژه به ساده‌ترین سؤالات تبدیل نماییم. در این فصل، تست‌های جدیدی نیز مورد بررسی قرار خواهند گرفت که می‌تواند به آمادگی شما برای پاسخ‌گویی به هر سؤالی از این مبحث کمک کند. در فصل هفدهم نیز به‌طور مختصر به موضوع نمونه‌برداری از سیگنال‌های زمان‌پیوسته پرداخته شده که البته در سال‌های اخیر، خیلی مورد توجه طراحان تست کنکور ارشد قرار نگرفته است.

روش پیشنهادی مطالعه کتاب

برای ارائه روش مطالعه این کتاب، ابتدا به ترتیب اولویت مطالب آن می‌پردازیم. طبیعتاً جلد اول کتاب نسبت به جلد دوم از اهمیت بیشتری برخوردار است. توصیه می‌گردد تا به تسلط بالایی بر روی جلد اول کتاب نرسیدید (که این کار احتمالاً با مطالعه کامل دو مرتبه‌ای کتاب به همراه همه تست‌های آن صورت می‌گیرد)، جلد دوم را آغاز نکنید. افرادی که قصد دارند به تسلط بالایی در این درس برسند، بعد از یادگیری کامل جلد اول کتاب، به مطالعه جلد دوم بپردازند. در جلد دوم نیز طبیعتاً متن درس و تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد انتهای فصول، از اهمیت بیشتری نسبت به تست‌های تألیفی برخوردار است. تست‌های خودآزمایی نیز در اولویت آخر قرار دارند. البته نظر مؤلف، حتی الامکان مطالعه همه کتاب با تمام جزئیات می‌باشد، اما در صورت نداشتن فرصت کافی، می‌توانید با توجه به اولویتی که بیان شد، صرفاً مطالب مهم‌تر را مطالعه نمایید. به هر حال هر چقدر بیشتر تلاش کنید و زمان بیشتری برای مطالعه و یادگیری این درس اختصاص دهید، ان شاء الله نتیجه بهتری خواهید گرفت. همچنین دقت کنید که فصل‌های نهم و پانزدهم از اهمیت بیشتری نسبت به بقیه فصول

برخوردار هستند، ولی همه فصل‌های قبل آن، تا حدودی پیش‌نیاز این فصل می‌باشند. البته بودجه‌بندی سؤالات در درس سیگنال در سال‌های اخیر بسیار متغیر بوده و نمی‌توان بیان کرد که کدام موضوع (سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و ...) به‌طور قطع بیشترین سؤلات را به خود اختصاص خواهد داد.

لازم به ذکر است که طبق تجربه سال‌های گذشته، در صورت امکان، سعی می‌شود از اوایل تابستان، یک برنامه مطالعاتی منظم به همراه آزمون‌های تألیفی، در سایت مؤلف قرار داده شود تا افرادی که قصد مطالعه این کتاب را دارند، با انگیزه بیشتری بتوانند از آن استفاده نمایند.

این کتاب مخصوصاً برای افرادی که به جزئیات مطالب و روش‌های حل یک تست دقت می‌کنند، بسیار مفید خواهد بود، زیرا سعی شده است که مباحث مختلف و راه حل‌های ارائه شده، به‌طور دقیق و جزئی بیان شوند. در بعضی از تست‌ها نیز چندین راه حل ارائه شده است که این موضوع به تسلط بیشتر و انسجام ذهنی شما در یادگیری روش‌های مختلف، کمک می‌کند. بنابراین توصیه می‌شود شما نیز زمان کافی را برای مطالعه دقیق کتاب و مطالعه همه روش‌های حل یک تست و حتی توضیحات داده شده در پاورقی‌های کتاب، اختصاص دهید. البته وسواس و صرف زمان بیش از حد برای یادگیری و فهم یک مطلب، علاوه بر اتلاف وقت، ممکن است باعث افزایش اضطراب نیز بشود. در صورت متوجه نشدن یک مطلب یا راه حل ارائه شده، کمی روی آن فکر کرده و مباحث مرتبط با آن را مرور نمایید؛ و اگر باز به نتیجه نرسیدید، از آن عبور کرده و در دورهای بعد به آن بپردازید. خیلی از اوقات نیز هنگام مطالعه یک مبحث جدید، ابهامات مباحث دیگر کاملاً برطرف می‌شود. بنابراین در هیچ نقطه‌ای متوقف نشوید؛ «پیش بروید، فهم موضوع به دنبال شما خواهد آمد.»[1]

در پایان از خانواده عزیزم و همه کسانی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند، صمیمانه تشکر می‌کنم. همچنین مراتب قدردانی خود را از مرکز خدمات آموزشی نصیر که انتشار این کتاب را تقبل کرده و همچنین از آقایان علیرضا داوودی مقدم، الیاس مهدی‌پور و سعید آزاد که در تهیه این مجموعه، بنده را کمک کردند، ابراز می‌نمایم. از آنجا که تایپ اکثر یا تقریباً تمامی مطالب و همچنین صفحه‌آرایی نهایی کتاب، توسط خود مؤلف صورت گرفته، اشتباهات تایپی به حداقل خود رسیده است، اما هرگز نمی‌توان ادعا کرد که این کتاب، از نظر املایی، ادبی و یا حتی محتوای علمی، بدون اشکال است. ان شاء الله خوشحال خواهم شد که پیشنهادات، انتقادات و همچنین سؤالات و ابهامات شما را در مورد موضوعات و مباحث مختلف کتاب از طریق پست الکترونیکی و سایت زیر و یا به‌صورت حضوری در مؤسسه نصیر دریافت نمایم. امیدوارم که این کتاب تأثیری هرچند اندک در پیشرفت علمی و اعتلای کشور عزیزمان در جهت آرمان‌های انقلاب اسلامی داشته باشد و روزی فرا رسد که «در دنیا هر کسی بخواهد به یافته‌های تازه علمی دست پیدا کند، مجبور بشود زبان فارسی یاد بگیرد».[2]

Taghaddosi.mahdi@gmail.com
www.mtsignal.ir
مهدی تقدسی ـ فروردین‌ماه ۱۳۹۴

[1] دالامبر ـ ریاضیدان معروف

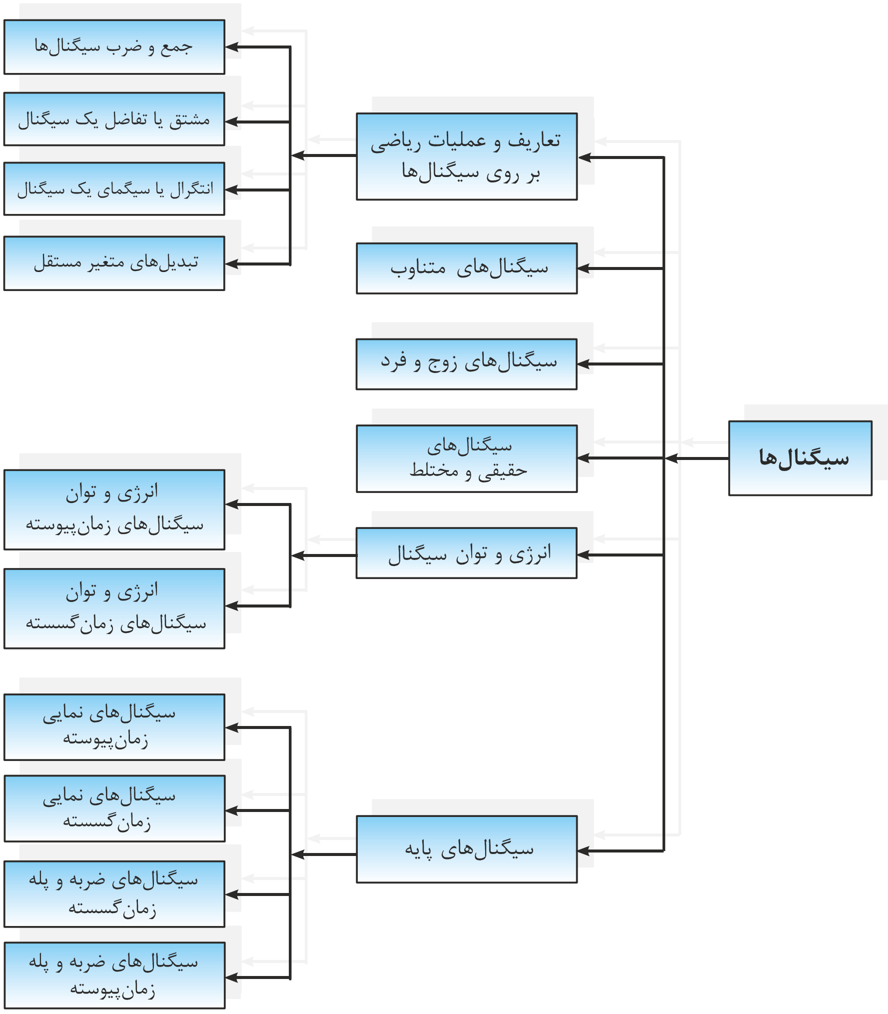
[2] مقام معظم رهبری ـ بیانات در دیدار شرکت کنندگان همایش ملی نخبگان جوان ـ مهرماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

عناوین جلد دوم

فصل اول

سیگنال‌ها

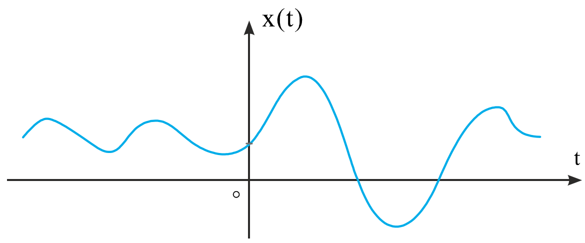


مقدمه

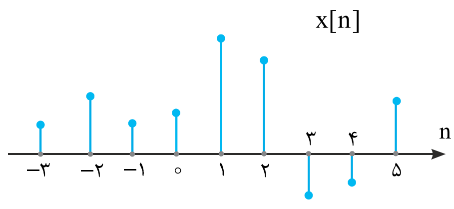
در این فصل به تعریف اجمالی سیگنال‌ها و مشخصات آن‌ها و همچنین به نحوه استفاده از آن‌ها به عنوان ابـزاری مهم در مباحث پردازش سیگنال می‌پردازیم و تعدادی از سیگنال‌های مهم که در ادامه درس با آن‌ها سـر و کـار خواهیم داشت را معرفی می‌نماییم.[۱]

تعاریف و عملیات ریاضی بر روی سیگنال‌ها

تعریف سیگنال: سیگنال از لحاظ ریاضی، تابعی از یک یا چند متغیـر مسـتقل اسـت؛[۲] امـا در کاربردهـای عملـی، طبیعتاً سیگنال‌هایی برای ما اهمیت دارند که حاوی اطلاعاتی از یک فرایند فیزیکی و یا حتی اقتصـادی و اجتمـاعی باشند؛ مانند سیگنال‌های مخابراتی، سیگنال‌های صوتی و تصویری، سیگنال‌های تغییرات شاخص‌های بورس و ... .
موضوع اصلی پردازش سیگنال، اِعمال تغییرات مورد نظر بر روی سیگنال‌ها و احیاناً استخراج اطلاعات و مؤلفـه‌هـای مورد نظر از آن می‌باشد که ما در این درس بیشتر به مبانی و مقدمات ریاضی این مباحث خواهیم پرداخت.
سیگنال‌ها بسته به نوع متغیرِ مستقل خود در حالت کلی به دو دسته زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته تقسیم می‌شوند:
سیگنال زمان‌پیوسته (C.T):[3] سیگنال زمان‌پیوسته، سیگنالی است که در همه زمـان‌هـا تعریـف شـده و دارای مقدار (هر چند صفر) می‌باشد. یعنی متغیر مستقل آن همه مقادیر حقیقی را به خود می‌گیرد. در این حالت معمـولاً متغیر مستقل را با "t" نمایش می‌دهند. به عنوان نمونه، سیگنال زمان‌پیوسته $x(t)$ را در زیر ملاحظه می‌کنید:



سیگنال زمان‌گسسته (D.T):[4] سیگنال زمان‌گسسته، سیگنالی است که فقـط در لحظـاتی گسسـته (صـحیح) از زمان تعریف می‌شود. یعنی متغیر مستقل آن فقط مقادیر صحیح به خود می‌گیرد. در این حالت معمولاً متغیر مسـتقل را با "n" نمایش می‌دهند. به عنوان نمونه، سیگنال زمان‌گسسته $x[n]$ را در شکل زیر ملاحظه می‌کنید. توجه داشته باشید که مقدار یک سیگنال زمان‌گسسته در حالت کلی هر چیزی می‌تواند باشد و تنها متغیر "n" لزوماً صحیح است.

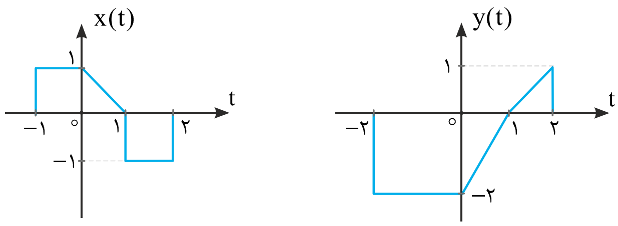


[۱] برای داشتن بازدهی حداکثری از مطالعه این کتاب، اکیداً توصیه می‌شود قبل از شروع، **مقدمه کتاب** را به‌طور دقیق بخوانید و با توجـه به توضیحات داده شده، روش مناسب خود برای مطالعه این کتاب را انتخاب نمایید.
[۲] در این درس، متغیر مستقل ما معمولاً زمان است.

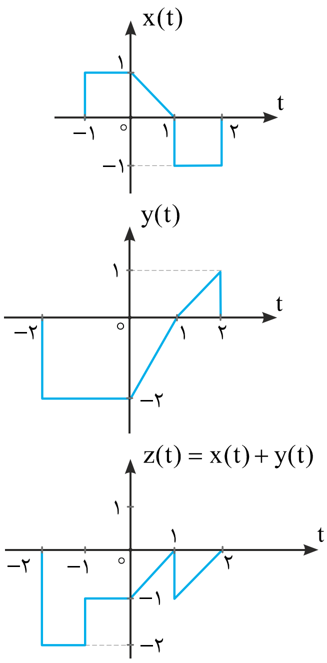
[3] Continuous Time
[4] Discrete Time

جمع و ضرب سیگنال‌ها

در بسیاری از مباحث این درس، نیاز است که شکل دو سیگنال را با هم جمع یا در هم ضرب نماییم. در این بخش، نحوه جمع و ضرب دو سیگنال را از روی شکل آن‌ها آموزش می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهیم دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ که در شکل زیر نشان داده شده‌اند را با هم جمع نماییم:



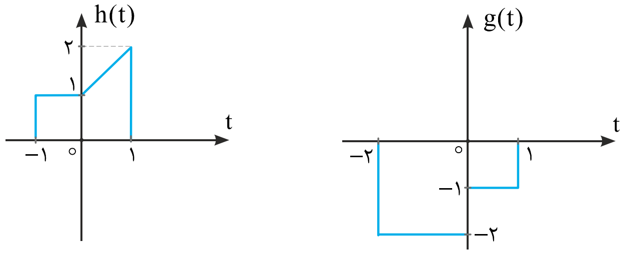
با فرض اینکه $z(t) = x(t) + y(t)$ باشد، مشخص است که $z(t)$ در هر لحظه $t_۰$ برابر $x(t_۰) + y(t_۰)$ می‌باشد. یعنی برای حاصل جمع دو شکل کافی است که دامنه‌های[1] (مقدارهای) آن‌ها را در هر لحظه، با هم جمع کنیم. بنابراین با رسم دو شکل $x(t)$ و $y(t)$ در زیر هم و جمع دامنه‌های آن‌ها شکل $z(t) = x(t) + y(t)$ به‌دست می‌آید. در لحظات $-۲ < t < -۱$ دامنه $x(t)$ برابر صفر و دامنه $y(t)$ برابر -۲ می‌باشد. بنابراین حاصل جمع آن‌ها برابر -۲ خواهد بود. در لحظات $-۱ < t < ۰$ دامنه $x(t)$ برابر ۱ و دامنه $y(t)$ برابر -۲ است. پس حاصل جمع آن‌ها برابر -۱ می‌شود. در لحظات $۰ < t < ۱$، $x(t)$ و $y(t)$ تابع خطی هستند. از آنجا که جمع دو خط، برابر خط می‌شود، برای جمع دو خط، کافی است که نقاط ابتدا و انتهای آن‌ها را با هم جمع کرده و سپس دو نقطه حاصل را به هم وصل نماییم. $x(t)$ و $y(t)$ در لحظه $t = ۰$ به ترتیب برابر ۱ و -۲ می‌باشند که حاصل جمع آن‌ها برابر -۱ می‌شود. از طرف دیگر $x(t)$ و $y(t)$ هر دو در لحظه $t = ۱$ برابر صفر و حاصل جمع آن‌ها نیز برابر صفر می‌شود. حال دو نقطه به‌دست آمده در لحظات $t = ۰, ۱$ را به هم وصل می‌کنیم. در لحظات $۱ < t < ۲$ دامنه $x(t)$ برابر -۱ و $y(t)$ برابر یک خط می‌باشد که جمع این دو نیز برابر همان خط می‌باشد که تنها یک واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است (در واقع نقاط ابتدا و انتهای خط با -۱ جمع می‌شوند). در بقیه لحظات نیز هر دو سیگنال برابر صفر می‌باشند و حاصل جمع آن‌ها نیز صفر خواهد بود. در نتیجه حاصل جمع دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ برابر شکل $z(t)$ می‌باشد.



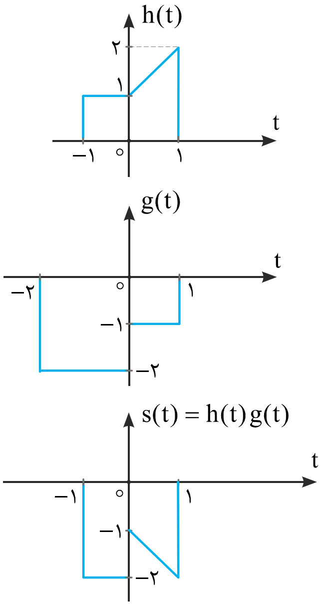
---

[1] در این درس، منظور از «دامنه سیگنال»، «مقدار سیگنال» است.

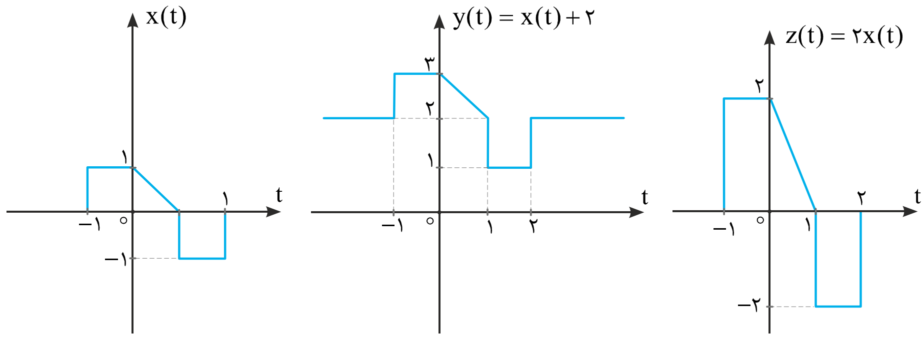
حال فرض کنید می‌خواهیم ضرب دو سیگنال $h(t)$ و $g(t)$ که در شکل زیر نشان داده شده‌اند را حساب نماییم:



با فرض اینکه $h(t)\cdot g(t)=s(t)$ باشد، مشخص است که $s(t)$ در هر لحظه $t_۰$ برابر $h(t_۰)\cdot g(t_۰)$ می‌باشد. یعنی برای حاصل ضرب دو شکل کافی است که دامنه‌های آن‌ها را در هر لحظه، در هم ضرب نماییم. بنابراین با رسم دو شکل $h(t)$ و $g(t)$ در زیر هم و ضرب دامنه‌های آن‌ها شکل $s(t)=h(t)\cdot g(t)$ به‌دست می‌آید. در لحظات $-۲<t<-۱$ دامنه $h(t)$ برابر صفر و دامنه $g(t)$ برابر -۲ می‌باشد. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها برابر صفر خواهد بود. در لحظات $-۱<t<۰$ دامنه $h(t)$ برابر ۱ و دامنه $g(t)$ برابر -۲ است. پس حاصل ضرب آن‌ها برابر -۲ می‌شود. در لحظات $۰<t<۱$، $h(t)$ یک خط و $g(t)$ برابر ثابت -۱ می‌باشد. ضرب خط در ثابت، برابر خط می‌شود. در نتیجه برای ضرب یک خط در یک ثابت، کافی است که نقاط ابتدا و انتهای خط را در آن مقدار ثابت ضرب کرده و سپس دو نقطه حاصل را به هم وصل نماییم. $h(t)$ و $g(t)$ در لحظه $t=۰$ به ترتیب برابر ۱ و -۱ می‌باشند که حاصل ضرب آن‌ها برابر -۱ می‌شود. از طرف دیگر $h(t)$ و $g(t)$ در لحظه $t=۱$ به ترتیب برابر ۲ و -۱ می‌باشند که حاصل ضرب آن‌ها برابر -۲ می‌شود. حال دو نقطه به‌دست آمده در لحظات $t=۰,۱$ را به هم وصل می‌کنیم. در بقیه لحظات نیز هر دو سیگنال برابر صفر می‌باشند و حاصل ضرب آن‌ها نیز برابر صفر خواهد بود. در نتیجه حاصل ضرب دو سیگنال $h(t)$ و $g(t)$ برابر $s(t)$ در شکل مقابل می‌باشد.



حال فرض کنید می‌خواهیم حاصل جمع یک سیگنال را با یک ثابت حساب کنیم. برای این کار کافی است که دامنه سیگنال را در همه لحظات با آن ثابت جمع نماییم.[۱] همچنین برای ضرب یک سیگنال در یک ثابت، کافی است که دامنه سیگنال را در همه لحظات در آن ثابت ضرب کنیم. به عنوان مثال در شکل زیر سیگنال $x(t)$ و $y(t) = x(t) + ۲$ و همچنین $z(t) = ۲x(t)$ را ملاحظه می‌کنید:



مشتق یا تفاضل یک سیگنال

در مباحث مختلف در این درس ممکن است به محاسبه مشتق یک سیگنال زمان‌پیوسته و یا محاسبه تفاضل یک سیگنال زمان‌گسسته از روی شکل آن‌ها برخورد کنیم. معمولاً این دو عبارت در حالت زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته معادل هم می‌باشند. منظور از $x'(t)$، مشتق سیگنال $x(t)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x'(t) = \lim_{\Delta \to ۰} \frac{x(t) - x(t-\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to ۰} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$$

توجه داشته باشید از آنجا که $\Delta \to ۰$ هم شامل ۰^+ می‌شود و هم شامل ۰^-، دو تساوی فوق دقیقاً معادل هم هستند. مفهوم مشتق یک تابع به این معنی است که تغییرات تابع را در هر لحظه نسبت به تغییرات متغیر مستقل (که معمولاً زمان است) بررسی نماییم. در واقع Δ در تعریف مشتق، کوچکترین بازه زمانی ممکن در حالت زمان‌پیوسته می‌باشد. اگر بخواهیم معادل مفهوم فوق را در حالت زمان‌گسسته بیان کنیم، باید از تفاضل استفاده کنیم. تفاضل سیگنال زمان‌گسسته $x[n]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

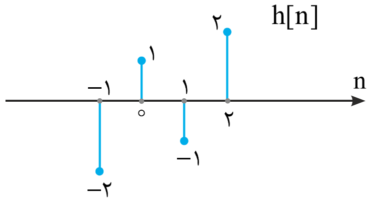
$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-۱]$$

عبارت فوق نیز مانند مشتق، تغییرات یک تابع زمان‌گسسته نسبت به تغییرات متغیر مستقل (که معمولاً زمان است) را نشان می‌دهد؛ اما چون کوچک‌ترین بازه و تغییرات زمانی ممکن در حالت زمان‌گسسته برابر ۱ واحد می‌باشد، $\Delta = ۱$ در نظر گرفته شده و فرمول مشتق به فرمول تفاضل تبدیل شده است. البته به‌طور دقیق‌تر به فرمول فوق، تفاضل پسرو گفته می‌شود که از فرمول تفاضل پیشرو که به‌صورت $x[n+۱] - x[n]$ تعریف می‌شود، متمایز گردد. ما در این درس معمولاً با تفاضل پسرو سر و کار داریم و هرگاه عبارت تفاضل یک سیگنال، به تنهایی به کار برده شد، منظور تفاضل پسرو می‌باشد.

[۱] در واقع در اینجا منظور از ثابت، سیگنال ثابت است.

مثال ۲۴

عبارت $h[n-1]\delta[n-2]$ را با توجه به شکل داده شده به‌دست آورید.



حل:

طبق فرمول شماره ۲ داریم:

$$h[n-1]\underbrace{\delta[n-2]}_{n=2} = h[1]\delta[n-2] = -\delta[n-2]$$

مثال ۲۵

تساوی‌های زیر را اثبات کنید.

الف) $\delta[n^2-n]=\delta[n]+\delta[n-1]$

ب) $u[-2n-1]=u[-n-1]$

ج) $\sin\frac{\pi}{6}n\cdot\delta[n-1]=\frac{1}{2}\delta[n-1]$

د) $\sum_{n=-3}^{5}\sin\frac{\pi}{6}n\cdot\delta[n-1]=\frac{1}{2}$

هـ) $\sum_{n=2}^{7}\sin\frac{\pi}{6}n\cdot\delta[n-1]=0$

حل:

الف) $\delta[n^2-n]=\delta[n]+\delta[n-1]$

با توجه به تعریف $\delta[f(n)]$ داریم:

$$\delta[n^2-n]=\begin{cases}1\ , & n^2-n=0\\ 0\ , & n^2-n\neq 0\end{cases}=\begin{cases}1\ , & n=0 \text{ or } 1\\ 0\ , & \text{o.w}\end{cases}=\delta[n]+\delta[n-1]$$

توجه شود سیگنالی که فقط در $n=0$ و $n=1$ مقدار داشته باشد، شامل یک ضربه در $n=0$ (یعنی $\delta[n]$) و یک ضربه در $n=1$ (یعنی $\delta[n-1]$) خواهد بود.

ب) $u[-2n-1]=u[-n-1]$

با توجه به تعریف $u[f(n)]$ داریم:

$$u[-2n-1]=\begin{cases}1\ , & -2n-1\geq 0\\ 0\ , & \text{o.w}\end{cases}=\begin{cases}1\ , & n\leq -\frac{1}{2}\\ 0\ , & \text{o.w}\end{cases}=\begin{cases}1\ , & n\leq -1\\ 0\ , & \text{o.w}\end{cases}$$

دقت کنید که شرط $n\leq -\frac{1}{2}$ معادل $n\leq -1$ است، زیرا n فقط مقادیر گسسته به خودش می‌گیرد. عبارت فوق به معنای یک پله از $n=-1$ به قبل می‌باشد که معادل $u[-n-1]$ است، زیرا $u[-n-1]$ نیز برای $-n-1\geq 0$ یا به‌طور معادل برای $n\leq -1$ مقدار دارد. یعنی داریم:

$$\begin{cases}1\ , & n\leq -1\\ 0\ , & \text{o.w}\end{cases}=\begin{cases}1\ , & -n-1\geq 0\\ 0\ , & \text{o.w}\end{cases}=u[-n-1]$$

ح) $y(t) = x'(t)$

با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$y(t) = x'(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$$

در رابطه فوق، Δ هم به سمت 0^+ (برای مشتق راست) و هم به سمت 0^- (برای مشتق چپ) میل می‌کند. بنابراین به دلیل وجود عبارت $x(t+\Delta)$ در رابطه سیستم، خروجی در لحظه t به ورودیِ لحظه $t+\Delta = t+0^+$ وابسته است. پس این سیستم غیرعلی می‌باشد.[۱]

قبل از ادامه درس و بیان ویژگی‌هایی از سیستم‌های علی، توضیحاتی در مورد نحوه اِعمال ورودی به یک سیستم و همچنین سیستم‌های زمان‌حقیقی[۲] (بلادرنگ) ارائه می‌شود که برای درک مفهوم علی بودن یک سیستم مفید است.[۳] اگرچه ما در تئوری و محاسبات، معمولاً ورودی یک سیستم را به عنوان یک تابع معین $x(t)$ بیان می‌کنیم که مقدار آن از لحظه ازل ($t = -\infty$) تا لحظه ابد ($t = +\infty$) مشخص است، اما در عمل این‌گونه نیست و در واقع ورودی با گذر زمان، ایجاد شده و به سیستم اعمال می‌شود. مثلاً یک سیستم تقویت‌کننده صوتی ساده را در نظر بگیرید. ورودی این سیستم یک سیگنال صوتی است که با گذر زمان تولید و به میکروفن اعمال شده و سپس با انجام پردازش‌های مورد نیاز، خروجی سیستم در بلندگو ایجاد می‌شود. این سیستم مثالی از یک سیستم زمان‌حقیقی است (زمان سیستم و ورودی، یکسان و واقعی می‌باشند)، یعنی همان لحظه‌ای که ورودی (مثلاً صوت) ایجاد می‌شود، به سیستم نیز اعمال می‌گردد و هم‌زمان خروجی نیز ایجاد خواهد شد.[۴] بدیهی است که در این حالت خروجی ایجاد شده در هر لحظه نمی‌تواند به ورودیِ لحظات آینده بستگی داشته باشد، زیرا هنوز ورودیِ لحظات آینده ایجاد نشده است که بخواهد در خروجی لحظه حال تأثیر داشته باشد. بنابراین همه سیستم‌ها در واقعیت در حالت زمان‌حقیقی، علی هستند و غیرعلی بودن یک سیستم زمان‌حقیقی، مستلزم پیش‌بینی آینده ورودی است که در عمل غیرممکن است. اما اگر سیستم، زمان‌حقیقی نباشد، به این معنی که ورودی اِعمالی به سیستم قبلاً ایجاد شده باشد یا در واقع خروجی نسبت به ورودی با تأخیر ایجاد شود، می‌توان سیستم‌های غیرعلی را نیز در واقعیت تصور کرد. مثلاً فرض کنید در همان سیستم تقویت‌کننده صوتی، ورودی صوتی قبلاً ضبط شده باشد. در این صورت، وقتی ورودی به سیستم اعمال می‌گردد، مقادیر آینده ورودی مشخص هستند (زیرا قبلاً ایجاد شده‌اند) و خروجی می‌تواند به آن مقادیر آینده نیز بستگی داشته باشد و در واقع در اینجا دیگر پیش‌بینی آینده ورودی به معنای قبل مطرح نیست. حالت دیگری که می‌توان سیستم‌های غیرعلی را در واقعیت تصور نمود، حالتی است که متغیر مستقل سیگنال‌ها، چیزی غیر از زمان (مثلاً مکان) باشد.[۵] در این صورت آینده ورودی به معنی مکان‌های بعدی است نه زمان‌های بعدی! در نتیجه پیش‌بینی از لحاظ زمانی مطرح نیست.

---

[۱] البته ممکن است در بعضی مراجع، سیستم مشتق‌گیر را علی در نظر بگیرند که در این صورت فرض را بر مشتق چپ گذاشته‌اند. اما ما در این کتاب، بنا را بر غیرعلی بودن مشتق می‌گذاریم. بنابراین اگر احیاناً در تست‌های کنکور، مشتق را علی فرض کردند، تعجب نکنید! ضمناً توجه داشته باشید که مشتق با تأخیر، قطعاً علی است. در این مورد در تست تألیفی ۳۸ در انتهای فصل پانزدهم صحبت خواهیم کرد.

[2] Real Time

[۳] اگرچه این توضیحات، برای حل مسائل و تست‌ها ضروری نیست، اما برای داشتن درک بهتری از مفهوم سیستم و بخصوص سیستم‌های علی، توصیه می‌شود این قسمت را مطالعه نمایید.

[۴] البته در عمل در هر سیستمی به هر حال یک تأخیر زمانی بین اعمال ورودی و ایجاد خروجی وجود خواهد شد، اما ما از این تأخیر بسیار کوچک صرف‌نظر کردیم.

[۵] در پردازش تصویر، یک تصویر را با یک سیگنال با متغیر مستقل مکانی نمایش می‌دهند که مثلاً مقادیر این سیگنال، می‌توانند نشان‌دهنده میزان روشنایی یا رنگ هر پیکسل در مکان‌های مختلف تصویر باشد.

بررسی سیستم B:

$$B:\ \ y(t)=\begin{cases}x(t)+x(t-۲) & ,\ x(t)\geq ۰\\ ۰ & ,\ x(t)<۰\end{cases}$$

چون در شرط‌ها ورودی داریم، سیستم غیرخطی است.

پایداری سیستم نیز مانند سیستم A اثبات می‌شود.

خروجی در هر لحظه t به ورودیِ لحظات t و $t-۲$ بستگی دارد، پس سیستم علی است.

همچنین داریم:

$$\begin{cases}T\{x(t-t_۰)\}=\begin{cases}x(t-t_۰)+x(t-۲-t_۰) & ,\ x(t-t_۰)\geq ۰\\ ۰ & ,\ x(t-t_۰)<۰\end{cases}\\ \\ y(t-t_۰)=\begin{cases}x(t-t_۰)+x(t-t_۰-۲) & ,\ x(t-t_۰)\geq ۰\\ ۰ & ,\ x(t-t_۰)<۰\end{cases}\end{cases}\xrightarrow{T\{x(t-t_۰)\}=y(t-t_۰)} TI$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۶. **سیستم زمان‌گسسته با رابطه** $y[n]=\sum_{k=-۱}^{\infty}x[n-k^۲]$ **، تغییر.......... با زمان و .... است.** **(سراسری ۹۱)**

۱) پذیر، پایدار ۲) پذیر، ناپایدار ۳) ناپذیر، ناپایدار ۴) ناپذیر، پایدار

حل:

بررسی TI بودن:

$$\begin{cases}T\{x[n-n_۰]\}=\sum_{k=-۱}^{\infty}x[n-k^۲-n_۰]\\ \\ y[n-n_۰]=\sum_{k=-۱}^{\infty}x[n-n_۰-k^۲]\end{cases}\xrightarrow{T\{x[n-n_۰]\}=y[n-n_۰]}\text{سیستم } TI$$

بررسی پایداری:

$$x[n]=A\longrightarrow x[n-k^۲]=A$$

$$y[n]=\sum_{k=-۱}^{\infty}\underbrace{x[n-k^۲]}_{x=A}=\sum_{k=-۱}^{\infty}A=\infty\longrightarrow\text{سیستم ناپایدار}$$

البته می‌توانستیم از همان ابتدا سیگما را در رابطه سیستم باز کنیم. یعنی:

$$y[n]=\sum_{k=-۱}^{\infty}x[n-k^۲]=x[n-۱]+x[n]+x[n-۱]+x[n-۲]+x[n-۳]+\cdots$$

مشخص است که سیستم فوق، TI و ناپایدار است. به‌طور مشابه اثبات کنید که سیستم $y(t)=\int_{۱}^{+\infty}x(t-\tau^۲)d\tau$ نیز TI و ناپایدار است.

گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم که کانولوشن $x(t)$ با $\delta(t)$ برابر همان $x(t)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$x(t)=x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

رابطه فوق بیانگر ترکیب خطی و انتقالی $x(t)$ از $\delta(t)$ است. توجه کنید که $x(\tau)$ در نقش ضریب ثابت، $\int$ مشابه و معادل عمل جمع و τ هم مقدار انتقال می‌باشد. حال می‌خواهیم پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ را برحسب پاسخ ضربه $h(t)$ به‌دست آوریم. با فرض اینکه T عملگر سیستم باشد و با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به $x(t)$ برابر می‌شود با:

$$y(t)=T\{x(t)\}=T\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)T\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

توجه کنید که به دلیل خطی بودن سیستم، عملگر $T\{\ \}$ از $\int$ (جمع) و $x(\tau)$ (ضریب) عبور می‌کند. همچنین به دلیل TI بودن سیستم، پاسخ به ورودی $\delta(t-\tau)$ برابر $T\{\delta(t-\tau)\}=h(t-\tau)$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

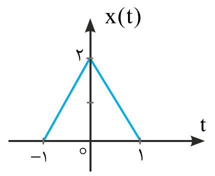
رابطه فوق را می‌توان با استفاده از عملگر کانولوشن به‌صورت زیر نمایش داد:

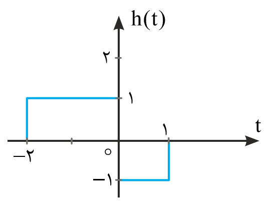
$$\boxed{y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)}$$

رابطه فوق بیانگر رابطه کلی یک سیستم LTI زمان‌پیوسته می‌باشد. از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که سیستم LTI با پاسخ ضربه‌اش به‌طور کامل مشخص و شناسایی می‌شود و پاسخ به هر ورودی دلخواه دیگر را می‌توان با جایگذاری در رابطه فوق به‌دست آورد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت هر سیستمی که رابطه آن به‌صورت رابطه فوق باشد، حتماً LTI خواهد بود.

مثال ۱۹

ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI در شکل زیر داده شده است. خروجی در لحظه $t=1$ برابر کدام است؟





۱) $y(1)=-1$ ۲) $y(1)=-2$ ۳) $y(1)=1$ ۴) $y(1)=2$

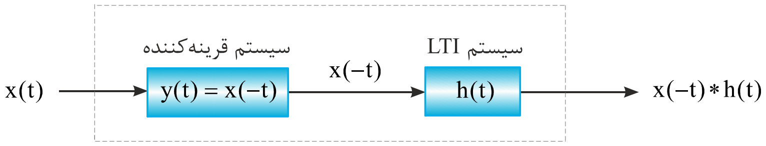
حل:

با توجه به LTI بودن سیستم، خروجی برابر کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه می‌باشد.

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

برای محاسبه کانولوشن در لحظه $t=t_0$، ابتدا باید یکی از سیگنال‌ها را قرینه کنیم. در اینجا به نظر ساده‌تر است که $x(t)$ را قرینه نماییم. بنابراین ابتدا $h(\tau)$ و $x(-\tau)$ را رسم می‌کنیم.

در واقع این سیستم را می‌توان به صورت اتصال متوالی دو سیستم زیر نمایش داد:



از آنجا که هر دو سیستم فوق، پایدار می‌باشند، در نتیجه سیستم کل نیز قطعاً پایدار خواهد بود.[۱]

به هر حال، همان‌طور که بیان شد، می‌توان با جایگذاری $h(t)=e^{t}u(-t)$ در رابطه سیستم، از روش‌های بیان شده در فصل دوم نیز برای بررسی TI بودن و پایداری استفاده کرد.

گزینه ۲ صحیح است.

۴۲. در مورد سیستم $y(t)=\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha}x(\alpha-t)\,d\alpha$ **کدام خواص صحیح است؟** **(آزاد ۷۹)**

۱) پایدار، TV ۲) ناپایدار، TV ۳) ناپایدار، TI ۴) پایدار، TI

حل:

این تست را در فصل قبل نیز حل کردیم، اما در اینجا می‌خواهیم راه حلی دیگر مبتنی بر عملگر کانولوشن ارائه نماییم. سعی می‌کنیم رابطه سیستم را به شکل کانولوشن بیان کنیم:

$$y(t)=\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha}x(\alpha-t)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha}\underbrace{u(\alpha)}_{\alpha>0}x(\alpha-t)\,d\alpha=x(-t)*e^{-t}u(t)$$

از آنجا که این رابطه، به صورت رابطه سیستم‌های LTI نیست، پس این سیستم LTI نمی‌باشد، اما از طرف دیگر مشخص است که این سیستم خطی است، در نتیجه این سیستم حتماً TV می‌باشد. در مورد پایداری سیستم نیز می‌توان به صورت زیر استدلال کرد:

اگر رابطه سیستم به صورت $y(t)=x(t)*e^{-t}u(t)$ بود، سیستم پایدار می‌شد، زیرا سیستم $y(t)=x(t)*e^{-t}u(t)$، یک سیستم LTI است و $h(t)=e^{-t}u(t)$ نیز انتگرال‌پذیر مطلق می‌باشد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt=1<\infty$$

پایداری سیستم $y(t)=x(t)*e^{-t}u(t)$ به این معنی است که اگر $x(t)$ محدود باشد، حاصل $y(t)=x(t)*e^{-t}u(t)$ نیز محدود خواهد بود. از طرف دیگر می‌توان گفت که اگر $x(t)$ محدود باشد، $x(-t)$ نیز محدود می‌شود. بنابراین در کل می‌توان نتیجه گرفت که اگر $x(t)$ محدود باشد، $y(t)=x(-t)*e^{-t}u(t)$ نیز محدود خواهد شد. پس سیستم $y(t)=x(-t)*e^{-t}u(t)$ نیز پایدار است.[۲]

گزینه ۱ صحیح است.

۴۳. در مورد سیستم زمان‌پیوسته $y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha^{2}}x(\alpha-t)\,d\alpha$ **کدام گزینه صحیح است؟** **(سراسری ۷۸)**

۱) پایدار، TI ۲) ناپایدار، TV ۳) ناپایدار، TI ۴) پایدار، TV

حل:

این تست را در فصل قبل نیز حل کردیم، اما در اینجا می‌خواهیم راه حلی دیگر مبتنی بر عملگر کانولوشن ارائه نماییم. سعی می‌کنیم رابطه سیستم را به شکل کانولوشن بیان کنیم.

---

[۱] در تست‌های تألیفی فصل دهم به‌طور دقیق بیان خواهیم کرد که اتصال متوالی دو سیستم پایدار، قطعاً پایدار خواهد بود.

[۲] البته می‌توانستیم مانند تست قبل بر اساس اتصال متوالی دو سیستم پایدار نیز استدلال نماییم.

اثبات: ابتدا رابطه عکس تبدیل فوریه را برای سیگنال $x(t)$ و تبدیل فوریه‌اش می‌نویسیم:

$$x(t)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$$

حال از دو طرف رابطه فوق نسبت به t مشتق می‌گیریم. توجه کنید که مشتق از انتگرال عبور می‌کند و در طرف راست تساوی فوق، کافی است از نمایی $e^{j\omega t}$ نسبت به t مشتق بگیریم که برابر $j\omega e^{j\omega t}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$x'(t)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\left[j\omega e^{j\omega t}\right]d\omega=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[j\omega X(\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

رابطه فوق شبیه همان رابطه عکس تبدیل فوریه است با این تفاوت که به‌جای $X(\omega)$، $j\omega X(\omega)$ و به جای $x(t)$، $x'(t)$ قرار گرفته است. پس این رابطه بیان می‌کند که $j\omega X(\omega)$ تبدیل فوریه $x'(t)$ است. همچنین می‌توان اثبات کرد که تبدیل فوریه $x^{(m)}(t)$ برابر $(j\omega)^m X(\omega)$ می‌باشد.

خاصیت تفاضل‌گیری را نیز به‌راحتی می‌توان با استفاده از خواص انتقال زمانی و خطی بودن اثبات کرد.

مثال ۱۸

اگر تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ برابر $X(\omega)=\frac{j\omega+۱}{j\omega+۲}$ باشد، سیگنال $x(t)$ را به‌دست آورید.

حل:

برای محاسبه عکس تبدیل فوریه $X(\omega)=\frac{j\omega+۱}{j\omega+۲}$ حداقل دو روش وجود دارد:

روش اول؛ ابتدا $X(\omega)$ را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم (مخرج را در صورت می‌سازیم و کسر را تفکیک می‌کنیم یا به عبارت دیگر صورت را بر مخرج تقسیم می‌نماییم) و سپس با استفاده از جدول، عکس فوریه می‌گیریم:

$$X(\omega)=\frac{j\omega+۱}{j\omega+۲}=\frac{j\omega+۲-۱}{j\omega+۲}=۱-\frac{۱}{j\omega+۲}\quad\xrightarrow{F^{-۱}}\quad x(t)=\delta(t)-e^{-۲t}u(t)$$

روش دوم؛ در این روش ابتدا کسر را تفکیک و سپس از خاصیت مشتق‌گیری در زمان استفاده می‌نماییم:

$$X(\omega)=\frac{j\omega+۱}{j\omega+۲}=j\omega\underbrace{\left(\frac{۱}{j\omega+۲}\right)}_{e^{-۲t}u(t)}+\underbrace{\frac{۱}{j\omega+۲}}_{e^{-۲t}u(t)}\quad\xrightarrow{F^{-۱}}\quad x(t)=\left(e^{-۲t}u(t)\right)'+e^{-۲t}u(t)$$

برای محاسبه $\left(e^{-۲t}u(t)\right)'$ باید از قاعده مشتق حاصل‌ضرب دو تابع (یعنی $(xy)'=x'y+xy'$) استفاده کرد:

$$x(t)=\left(e^{-۲t}\right)'u(t)+e^{-۲t}\left(u(t)\right)'+e^{-۲t}u(t)=-۲e^{-۲t}u(t)+e^{-۲t}\delta(t)+e^{-۲t}u(t)$$

از آنجا که $e^{-۲t}\delta(t)=e^{-۲(۰)}\delta(t)=\delta(t)$ است، حاصل عبارت فوق دقیقاً برابر همان پاسخ روش اول می‌باشد.

۱۰) انتگرال‌گیری (انباشتگی) در زمان:

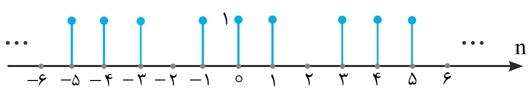
اگر از یک سیگنال زمان‌پیوسته، انتگرال بگیریم (یا از یک سیگنال زمان‌گسسته مجموع بگیریم)، تبدیل فوریه آن به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\quad\xleftrightarrow{F}\quad\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(۰)\delta(\omega)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\quad\xleftrightarrow{F}\quad\frac{X(\omega)}{۱-e^{-j\omega}}+\pi X(۰)\tilde{\delta}(\omega)$$

مثال ۲

سیگنال متناوب $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. ضرایب سری فوریه این سیگنال را به‌دست آورید و سپس سیگنال را برحسب سری فوریه‌اش بیان نمایید.



حل:

این مثال را نیز در فصل چهارم به‌طور کامل حل کردیم و در اینجا فقط به عنوان یادآوری، خلاصه آن را بیان می‌نماییم. دوره تناوب اصلی این سیگنال برابر $N=4$ و در نتیجه فرکانس اصلی آن برابر $\omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. برای محاسبه a_k از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{1}(1)\,e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$$

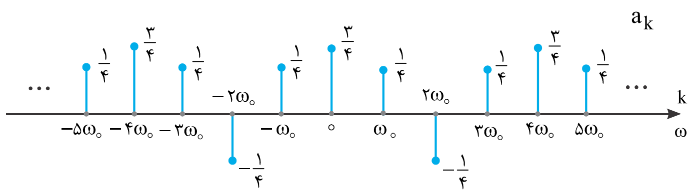
سیگمای فوق را می‌توان به دو روش استفاده از فرمول تصاعد هندسی یا باز کردن سیگما محاسبه کرد که در فصل چهارم ملاحظه کردید دو پاسخ ظاهراً متفاوت اما برابر به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$a_k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos k\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin k\frac{3\pi}{4}}{\sin k\frac{\pi}{4}}$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت a_k با دوره تناوب $N=4$ متناوب است. با توجه به a_k به‌دست‌آمده، مقادیر آن در یک دوره تناوب مثلاً از $k=-2$ تا $k=1$ برابر است با:

$$a_{-2}=-\frac{1}{4}\ ,\ a_{-1}=\frac{1}{4}\ ,\ a_0=\frac{3}{4}\ ,\ a_1=\frac{1}{4}$$

این مقادیر با دوره تناوب ۴ تکرار می‌شوند. یعنی $a_k=a_{k+4}$ خواهد بود. می‌توان a_k را به‌صورت زیر رسم کرد:



که در اینجا $\omega_0=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. حال می‌توان سری فوریه $x[n]$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=-2}^{1}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin k\frac{3\pi}{4}}{\sin k\frac{\pi}{4}}\,e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

۱) سیگنال نمایی یک‌طرفه (سمت راستی یا سمت چپی):

سیگنال‌های زمان‌پیوسته $e^{at}u(t)$ و $e^{at}u(-t)$ را به ترتیب سیگنال‌های نمایی یک‌طرفه سمت راستی و سمت چپی می‌نامند، زیرا فقط برای زمان‌های مثبت یا منفی مقدار دارند. توجه کنید که a در حالت کلی یک ثابت مختلط می‌باشد. تبدیل لاپلاس این سیگنال‌ها برابر است با:

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad , \quad Re[s] > Re[a]$$

$$-e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad , \quad Re[s] < Re[a]$$

ملاحظه می‌کنید که تبدیل لاپلاس هر دو سیگنال $e^{at}u(t)$ و $-e^{at}u(-t)$ با هم برابر می‌باشد و فقط ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن‌ها با هم متفاوت است. در نتیجه تبدیل لاپلاس به تنهایی نمی‌تواند تعیین کننده سیگنال باشد و باید ناحیه همگرایی آن نیز مشخص باشد. فرمول‌های زیر تعمیم روابط فوق می‌باشند که با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری در حوزه لاپلاس به‌راحتی اثبات می‌شوند.

$$t^n e^{at}\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad , \quad Re[s] > Re[a]$$

$$-t^n e^{at}\, u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad , \quad Re[s] < Re[a]$$

۲) سیگنال پله (سمت راستی یا سمت چپی):

سیگنال‌های زمان‌پیوسته $e^{at}u(t)$ و $e^{at}u(-t)$ به‌ازای $a=0$ به سیگنال‌های $u(t)$ و $u(-t)$ تبدیل می‌شوند. بنابراین تبدیل لاپلاس سیگنال پله سمت راستی و سمت چپی با استفاده از فرمول شماره ۱ برابر است با:

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad , \quad Re[s] > 0$$

$$-u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad , \quad Re[s] < 0$$

تعمیم فرمول‌های فوق به‌صورت زیر می‌باشد:

$$t^n u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad Re[s] > 0$$

$$-t^n u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad Re[s] < 0$$

۳) سیگنال ضربه:

تبدیل لاپلاس سیگنال ضربه و ضربه انتقال‌یافته برابر است با:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1 \quad , \quad ROC: \text{کل صفحه } \mathcal{S}$$

$$\delta(t+t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{st_0} \quad , \quad ROC: \longrightarrow \begin{cases} t_0 > 0 \longrightarrow \text{کل صفحه } \mathcal{S} \text{ به‌جز } s=+\infty \\ t_0 < 0 \longrightarrow \text{کل صفحه } \mathcal{S} \text{ به‌جز } s=-\infty \end{cases}$$

اما تبدیل فوریه $x[n]=2^n u[n]$ وجود ندارد، زیرا تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $x[n]=2^n u[n]$ برابر $X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}$ با ناحیه همگرایی $|z|>2$ می‌باشد و دایره یکه در ROC قرار ندارد. یا به عنوان مثالی دیگر، تبدیل فوریه سیگنال $x[n]=u[n]$ اگرچه وجود دارد، اما همگرا نیست و نمی‌توان آن را از روی تبدیل $\mathcal{Z}$اش محاسبه کرد، زیرا تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $x[n]=u[n]$ برابر $X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$ با ناحیه همگرایی $|z|>1$ می‌باشد و دایره یکه در ROC قرار ندارد.[1]

همان‌طور که بیان شد اگر دایره یکه در ناحیه همگرایی $X(z)$ باشد، تبدیل فوریه همگراست و می‌توان آن را با جایگذاری $z=e^{j\omega}$ در $X(z)$ محاسبه کرد. بنابراین وقتی دایره یکه در ناحیه همگرایی تبدیل $\mathcal{Z}$ باشد، می‌توان گفت که تبدیل فوریه حالت خاصی از تبدیل $\mathcal{Z}$ بهازای $z=e^{j\omega}$ می‌باشد، اما در غیر این صورت این‌طور نیست. بسیاری از سیگنال‌ها هستند که تبدیل فوریه دارند اما تبدیل $\mathcal{Z}$ ندارند. از آن جمله می‌توان به سیگنال ثابت و چندجمله‌ای یعنی $x[n]=1, n, n^2, \ldots$، سیگنال‌های متناوب[2] مثلاً $x[n]=\cos\omega_0 n, \sin\omega_0 n, e^{j\omega_0 n}, \ldots$، سیگنال‌های $x[n]=\frac{\sin wn}{\pi n}, \frac{\sin^2 wn}{\pi^2 n^2}, \ldots$ و ... اشاره نمود. بسیاری از سیگنال‌ها نیز $\mathcal{Z}$ دارند اما فوریه ندارند، مانند سیگنال‌های نمایی واگرا، مثلاً $x[n]=2^n u[n]$. از طرف دیگر سیگنال‌هایی وجود دارند که نه فوریه دارند نه $\mathcal{Z}$، مانند سیگنال‌های $x[n]=2^n, 2^{|n|}, 2^{n^2}u[n]$. در تست ۲ انتهای فصل و همچنین در فصل چهاردهم روش‌هایی برای تشخیص اینکه چه سیگنال‌هایی $\mathcal{Z}$ ندارند، ارائه خواهیم کرد.

خواص تبدیل $\mathcal{Z}$

در این قسمت می‌خواهیم خواص تبدیل $\mathcal{Z}$ را بررسی نماییم. در این خواص، تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $x[n]$ را با $X(z)$ و ناحیه همگرایی R_x و تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $y[n]$ را با $Y(z)$ و ناحیه همگرایی R_y نمایش می‌دهیم:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \quad , \quad ROC: R_x$$

$$y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) \quad , \quad ROC: R_y$$

۱) خطی بودن:

اگر دو سیگنال $x[n]$ و $y[n]$ با هم به‌صورت زیر ترکیب خطی شوند، تبدیل $\mathcal{Z}$ آن‌ها نیز به همان صورت با هم ترکیب خطی خواهند شد. در واقع این خاصیت بیان می‌کند که تبدیل $\mathcal{Z}$، یک تبدیل خطی است. همچنین ناحیه همگرایی تبدیل حاصل نیز مانند تبدیل لاپلاس حداقل برابر اشتراک R_x و R_y خواهد بود و که اگر حذف صفر و قطبی رخ دهد، ممکن است بزرگ‌تر نیز بشود.

$$\boxed{Ax[n]+By[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} AX(z)+BY(z) \quad , \quad ROC \geq \left(R_x \cap R_y\right)}$$

اگر $R_x \cap R_y=\varnothing$ باشد آنگاه ناحیه همگرایی $AX(z)+BY(z)$، قطعاً تهی می‌باشد و در واقع تبدیل $\mathcal{Z}$ $A\,x(t)+B\,y(t)$ وجود نخواهد داشت؛ و اگر $R_x \cap R_y \neq \varnothing$ باشد، آنگاه ناحیه همگرایی $AX(z)+BY(z)$

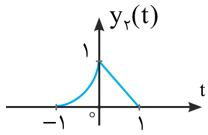
[1] در فصل چهاردهم بحث کامل‌تری در این موضوع و همچنین موضوعات مرتبط با آن ارائه خواهیم نمود ولی در اکثر موارد در حد همین اطلاعات کفایت می‌کند.

[2] منظور از سیگنال‌های متناوب، سیگنال‌هایی هستند که از دو طرف (از $-\infty$ تا $+\infty$) متناوب باشند. سیگنال‌های متناوب یکطرفه (از ۰ تا $+\infty$) دارای تبدیل $\mathcal{Z}$ می‌باشند که در فصل چهاردهم بررسی خواهند شد.

بنابراین برای محاسبه پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$ داریم:

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)\,d\tau$$

با جایگذاری $x_2(t)$ در رابطه فوق، $y_2(t)$ به شکل زیر به‌دست می‌آید:



مثال ۲۰

پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x_1[n]=2^n u[n]$ برابر $y_1[n]=3^n u[n]$ شده است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n]=3^n u[n]$ را به‌دست آورید.

حل:

در این مثال نیز با توجه به اینکه نمی‌توان به‌راحتی رابطه‌ای خطی و انتقالی بین $x_2[n]$ و $x_1[n]$ ایجاد کرد، ابتدا باید سیستم را شناسایی نماییم (روش اول)؛ در اینجا با توجه به ورودی ـ خروجی داده شده، می‌توان تابع تبدیل سیستم را به‌راحتی تعیین کرد:

$$x_1[n]=2^n u[n]\quad\xleftrightarrow{\mathscr{Z}}\quad X_1(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}\ ,\ |z|>2$$

$$y_1[n]=3^n u[n]\quad\xleftrightarrow{\mathscr{Z}}\quad Y_1(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}}\ ,\ |z|>3$$

$$\Rightarrow\quad H(z)=\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}=\frac{1-2z^{-1}}{1-3z^{-1}}\ ,\ |z|>3$$

توجه کنید که ناحیه همگرایی $H(z)$ را طوری انتخاب کردیم که با نواحی همگرایی $X_1(z)$ و $Y_1(z)$ اشتراک داشته باشد. حال که تابع تبدیل سیستم را به‌دست آوردیم، برای محاسبه پاسخ $x_2[n]$ از حوزه $\mathscr{Z}$ استفاده می‌کنیم:

$$x_2[n]=3^n u[n]\quad\xleftrightarrow{\mathscr{Z}}\quad X_2(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}}\ ,\ |z|>3$$

$$Y_2(z)=X_2(z)H(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}}\cdot\frac{1-2z^{-1}}{1-3z^{-1}}=\frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1})^2}\ ,\ |z|>3$$

توجه شود که ناحیه همگرایی $Y_2(z)$ را حداقل برابر اشتراک نواحی همگرایی $X_2(z)$ و $H(z)$ انتخاب کردیم. برای محاسبه عکس تبدیل $\mathscr{Z}$ عبارت فوق، از روش استاندارد داریم:

$$Y_2(z)=\frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1})^2}=\frac{1-2s}{(1-3s)^2}=\frac{A}{(1-3s)^2}+\frac{B}{1-3s}$$

با ضرب دو طرف عبارت فوق در $(1-3s)^2$ و جایگذاری $s=\frac{1}{3}$، $A=\frac{1}{3}$ به‌دست می‌آید. سپس با جایگذاری $s=0$ در دو طرف رابطه، $B=\frac{2}{3}$ حاصل می‌شود. در نتیجه داریم:

حل:

روش اول؛ اگر پاسخ پله سیستم را با $s(t)$ نمایش دهیم، با توجه به نکته ۳۳ فصل دوم، پاسخ حالت دائمی به ورودی $x(t)=3u(t)$ برابر می‌شود با:

$$x(t)=3u(t) \longrightarrow y(t)=3s(t) \Rightarrow y(+\infty)=3s(+\infty)=3\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=3H(0)$$

اما با توجه به اینکه ناحیه همگرایی $H(s)$ به دلیل علی بودن، به‌صورت $Re[s]>2$ می‌باشد، $s=0$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار ندارد و بنابراین $H(0)$ نامحدود می‌شود. در نتیجه پاسخ حالت دائمی به ورودی $3u(t)$ نیز بی‌نهایت خواهد بود.

روش دوم؛ از قضیه مقدار نهایی که در فصل هفتم بیان شد، استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا پاسخ به ورودی $x(t)=3u(t)$ را در حوزه لاپلاس به دست می‌آوریم:

$$x(t)=3u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)=\frac{3}{s}\ ,\ Re[s]>0$$

$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{3}{s(s-2)}\ ,\ ROC:\ \left[\left(Re[s]>0\right)\cap\left(Re[s]>2\right)\right]\equiv Re[s]>2$$

حال باید قضیه مقدار نهایی را در مورد $Y(s)$ اعمال کنیم. از آنجا که ناحیه همگرایی $Y(s)$، سمت راستی است، پس سیگنال $y(t)$ نیز سمت راستی می‌باشد. از طرف دیگر، $sY(s)=\frac{3}{s-2}$ یک قطب در سمت راست محور $j\omega$ دارد، بنابراین طبق قضیه مقدار نهایی، $y(+\infty)=\infty$ می‌باشد.

روش سوم؛ در این روش پاسخ به ورودی $x(t)=3u(t)$ را محاسبه می‌کنیم و مقدار آن را در $t=+\infty$ به‌دست می‌آوریم. با توجه به روش دوم، $Y(s)$ برابر است با:

$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{3}{s(s-2)}=\frac{-\frac{3}{2}}{s}+\frac{\frac{3}{2}}{s-2}\ ,\ Re[s]>2$$

$$\Rightarrow\ y(t)=-\frac{3}{2}u(t)+\frac{3}{2}e^{2t}u(t) \xrightarrow{t\to+\infty} y(+\infty)=+\infty$$

گزینه ۴ صحیح است.

۱۰. یک سیستم زمان‌گسسته LTI علی دارای فقط یک صفر و یک قطب می‌باشد و می‌دانیم پاسخ ضربه آن در شرایط زیر صدق می‌کند. محل صفر z_0 و قطب P_0 آن را مشخص کنید. **(سراسری ۸۵)**

$$h[0]=1\ ,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]=4\ ,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h[n]=0$$

۱) $P_0=\frac{1}{2}\ ,\ z_0=1$ ۲) $P_0=\frac{1}{3}\ ,\ z_0=1$ ۳) $P_0=\frac{1}{2}\ ,\ z_0=-1$ ۴) $P_0=\frac{1}{3}\ ,\ z_0=-1$

حل:

چون سیستم دارای یک صفر در z_0 و یک قطب در P_0 می‌باشد، فرم کلی $H(z)$ به‌صورت زیر است:

$$H(z)=k\frac{z-z_0}{z-P_0} \qquad (1)$$

حال با اطلاعات داده شده در صورت تست، باید مقادیر مجهول z_0 و P_0 را در رابطه فوق تعیین نماییم.

در نتیجه بسط سری فوریه $x_2[n]$ و در نتیجه خروجی آن طبق نکته ۷۰ برابر است با:

$$x_2[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=-1}^{1}\frac{1}{3}e^{jk\frac{2\pi}{3}n}\longrightarrow y_2[n]=\sum_{k=-1}^{1}\frac{1}{3}H(k\frac{2\pi}{3})e^{jk\frac{2\pi}{3}n}$$

حال با باز کردن سیگمای فوق و جایگذاری مقادیر مورد نیاز در آن، خروجی $y_2[n]$ برابر می‌شود با:

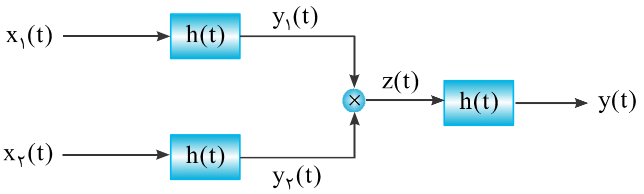
$$y_2[n]=\sum_{k=-1}^{1}\frac{1}{3}H(k\frac{2\pi}{3})e^{jk\frac{2\pi}{3}n}=\frac{1}{3}H(-\frac{2\pi}{3})e^{-j\frac{2\pi}{3}n}+\frac{1}{3}H(0)+\frac{1}{3}H(\frac{2\pi}{3})e^{j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$\Rightarrow\quad y_2[n]=-\frac{1}{3j}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3j}e^{j\frac{2\pi}{3}n}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}n$$

۷۲. خروجی سیستم زیر با فرض $h(t)=\frac{\sin 10\pi t}{\pi t}$ برابر کدام است؟ **(آزاد ۸۶)**

$$x_1(t)=\sum_{n=1}^{5}\cos 4\pi nt$$

$$x_2(t)=\sum_{n=1}^{5}\cos 8\pi nt$$



۱) $\sum_{n=1}^{5}\frac{1+\cos 4\pi nt}{2}$ ۲) $\frac{1+\cos 4\pi t}{2}$ ۳) $\frac{1+\cos 8\pi t}{2}$ ۴) $\frac{\cos 8\pi t+\cos 4\pi t}{2}$

حل:

با توجه به اینکه $h(t)$ حقیقی است، برای محاسبه پاسخ به ورودی‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ که به‌صورت کسینوسی هستند، از نکته ۶۹ استفاده می‌کنیم. پاسخ فرکانسی سیستم‌ها برابر می‌باشد با:

$$H(\omega)=\Pi(\frac{\omega}{20\pi})\longrightarrow |H(\omega)|=1\ ,\ -10\pi<\omega<10\pi\quad ,\quad \measuredangle H(\omega)=0$$

پاسخ به ورودی‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ طبق نکته ۶۹ و با توجه خطی بودن سیستم‌ها برابر می‌شوند با:

$$y_1(t)=\sum_{n=1}^{5}|H(4\pi n)|\cos\left(4\pi nt+\measuredangle H(4\pi n)\right)=\cos 4\pi t+\cos 8\pi t$$

$$y_2(t)=\sum_{n=1}^{5}|H(8\pi n)|\cos\left(8\pi nt+\measuredangle H(8\pi n)\right)=\cos 8\pi t$$

توجه شود که در روابط فوق با توجه به حدود سیگما، $|H(4\pi n)|$ فقط به‌ازای $n=1,2$ و $|H(8\pi n)|$ فقط به‌ازای $n=1$ مقدار دارد. در نتیجه $z(t)$ برابر می‌باشد با:

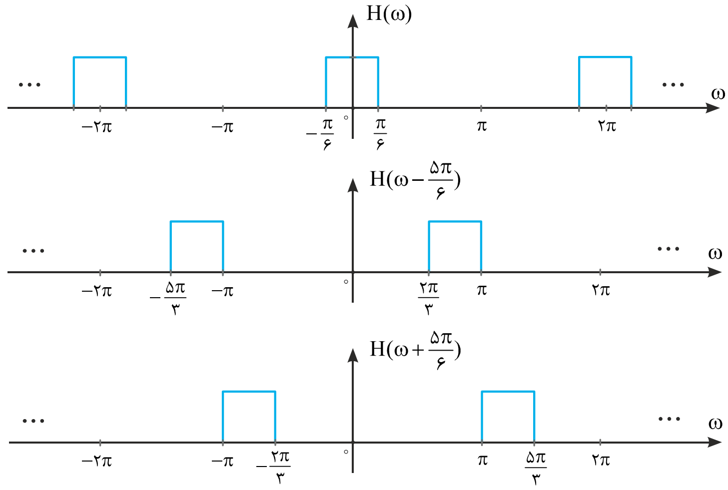
$$z(t)=y_1(t)\cdot y_2(t)=\left(\cos 4\pi t+\cos 8\pi t\right)\left(\cos 8\pi t\right)=\frac{1}{2}\cos 12\pi t+\frac{1}{2}\cos 4\pi t+\frac{1}{2}+\cos 16\pi t$$

حال پاسخ به ورودی فوق طبق نکات ۶۷ و ۶۹ برابر می‌شود با:

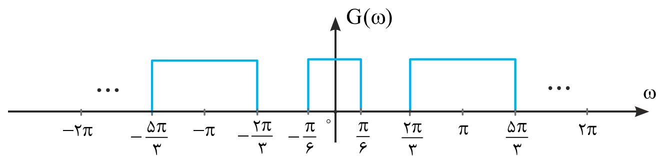
$$y(t)=\frac{1}{2}|H(12\pi)|\cos\left(12\pi t+\measuredangle H(12\pi)\right)+\frac{1}{2}|H(4\pi)|\cos\left(4\pi t+\measuredangle H(4\pi)\right)$$
$$+\frac{1}{2}H(0)+\frac{1}{2}|H(16\pi)|\cos\left(16\pi t+\measuredangle H(16\pi)\right)=\frac{1}{2}\cos 4\pi t+\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ صحیح است.

شکل $H(\omega)$ طبق صورت تست و همچنین $H(\omega-\frac{۵\pi}{۶})$ و $H(\omega+\frac{۵\pi}{۶})$ به‌صورت زیر می‌باشند:

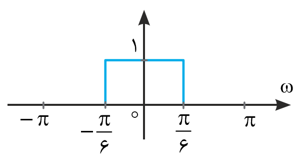


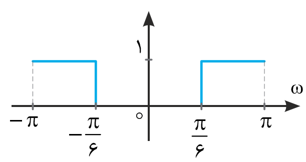
در نتیجه $G(\omega)=H(\omega+\frac{۵\pi}{۶})+H(\omega-\frac{۵\pi}{۶})+H(\omega)$ به شکل زیر خواهد بود که فیلتـری میـان‌گـذر است که ظاهراً طراح تست، فرکانس مرکزی آن را نیز به‌صورت $\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{\frac{\pi}{۶}+\frac{۲\pi}{۳}}{۲}$ تعریف کرده است.

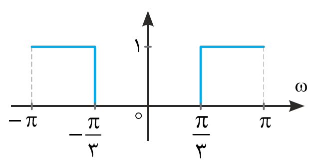


گزینه ۲ صحیح است.

۱۴۳. اگر $h_۱[n]$ پاسخ ضربه یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\omega=\frac{\pi}{۳}$ باشد، آنگـاه فیلتـری بـا پاسـخ ضربه $h_۲[n]=\begin{cases} h_۱[\frac{n}{۲}] & , \text{ زوج } n \\ ۰ & , \text{ فرد } n \end{cases}$ دارای کدام مشخصه است؟ **(سراسری ۷۸)**

۱) 

۲) 

۳) 

۴)