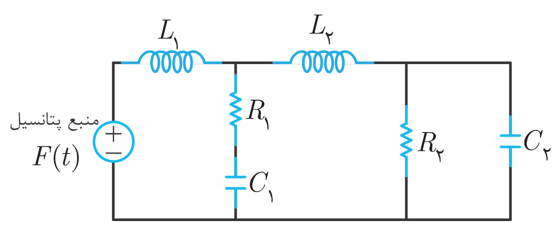
از ۲ تا ۳ مجموعه فنر k_1 و دمپر b_1 قرار گرفته که معادلش در سیستم الکتریکی خازن C_1 و مقاومت R_1 است با توجه به خصوصیت اجزاء نیرویی نظیر فنر و دمپر، نیروها در ۲ و ۳ برابر و سرعتها متفاوتند پس مجموعه خازن C_1 و مقاومت R_1 در مدار موازی قرار می‌گیرد. اما ترکیب آنها را باید از نحوه توزیع نیرو بدست آورد. نیرویی F_2 به دو نیروی مختلف در فنر k_1 و دمپر b_1 تقسیم می‌شود پس ترکیب خازن C_1 و مقاومت R_1 باید به شکلی باشد که پتانسیل در آنها تقسیم شود و لذا ترکیب C_1 و R_1 سری است در نتیجه ترکیب سری در مدار موازی می‌شود.

از ۳ تا ۴ مشابه ۱ تا ۲ سلف L_2 به صورت سری قرار می‌گیرد.

از ۴ تا ۵ مجموعه فنر k_2 و دمپر b_2 قرار گرفته که معادلش در سیستم الکتریکی، خازن C_2 و مقاومت R_2 است. همانند ۲ تا ۳ این مجموعه به صورت موازی در مدار قرار می‌گیرد چون پتانسیل ۲ و پتانسیل ۳ برابر است. اما ترکیب آنها از نحوه توزیع نیرو بین فنر K_2 و دمپر b_2 بدین صورتست که نیروی F_4 به طور یکسان به فنر K_2 و دمپر b_2 منتقل می‌شود. پس باید پتانسیل خازن C_2 و مقاومت R_2 یکسان باشد لذا ترکیب آنها موازیست در نتیجه ترکیب موازی در مدار موازی می‌شود.

در پایان در ورودی ۱ منبع پتانسیل را جایگزین نیروی ورودی $F(t)$ نموده و در تکیه‌گاه (مقطع ۵) سیستم مکانیکی، سرعت صفر است و مشابه آن در سیستم الکتریکی جریان در مقطع ۵ باید صفر باشد پس $f_5 = 0$ و آن بخشی از سیم که حامل جریان F_5 است را از مدار الکتریکی حذف نموده تا مدار حاصل بدست آید: (شکل ۱۱.۱)

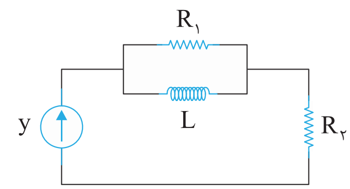


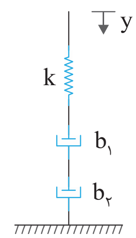
شکل ۱۱.۱ مدار الکتریکی مشابه بر اساس تشابه مستقیم

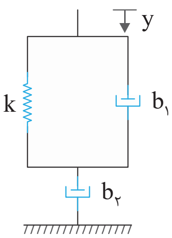
با توجه به نتیجه بدست آمده در تشابه مستقیم می‌توان در بسیاری از موارد به شکل زیر عمل نمود و مستقیماً به مدار الکتریکی مشابه دست یافت.

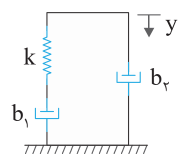
- جایگزین جرم در تشابه مستقیم، سلف در مدار سری است.
- جایگزین اجزاء بر نیرویی، فنر و دمپر خازن و مقاومت هستند که اگر در مدار مکانیکی ترکیب موازی باشند در مدار الکتریکی ترکیب سری در مدار موازیند و اگر در مدار مکانیکی ترکیب سری باشند، ترکیب موازی در مدار موازیند.

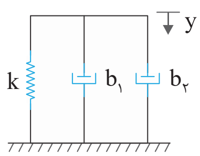
۱۲- سیستم مکانیکی معادل را بر اساس تشابه نیرو معادل جریان به دست آورید. (تألیفی)



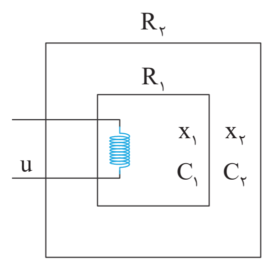
۱)


۲)


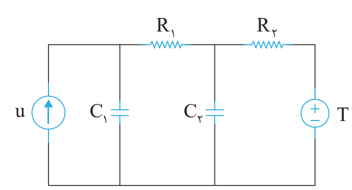
۳)


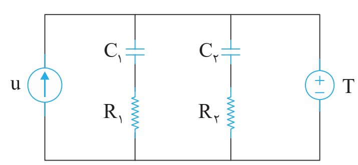
۴)


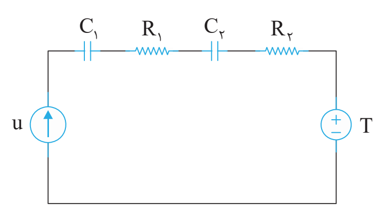
۱۳- دیاگرام الکتریکی مشابه سیستم حرارتی شکل زیر را بر اساس تشابه دبی حرارتی معادل جریان به دست آورید. (تألیفی)

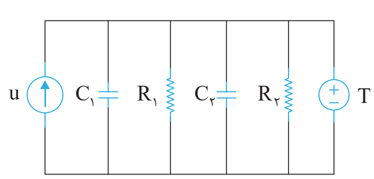


T درجه حرارت محیط

۱)


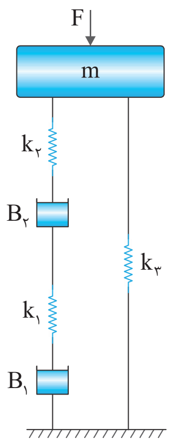
۲)


۳)


۴)


۳۵- معادل الکتریکی سیستم مکانیکی زیر براساس نیرو- ولتاژ کدام است؟

(مهندسی مکانیک- سراسری ۸۳)

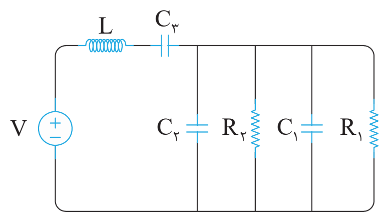


$F \to V$

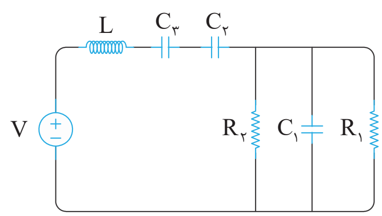
$m \to L$

$K \to \frac{۱}{C}$

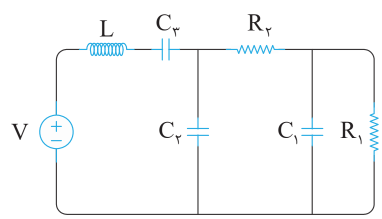
$B \to R$



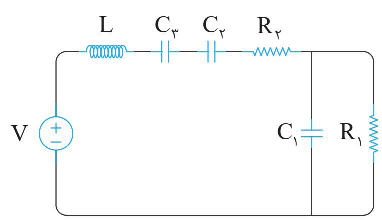
۱)



۲)



۳)



۴)

معادلات وضعیت: $A\dot{x} = Q - \frac{x}{R} \Rightarrow \dot{x} = \frac{-۱}{RA}x + \frac{۱}{A}Q$

الف.

$$\begin{vmatrix} \dot{x} = \frac{-۱}{RA}x + \frac{۱}{A}Q \\ y = x \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a = \frac{-۱}{RA} \ , \ b = \frac{۱}{A} \\ c = ۱ \ , \ d = ۰ \end{vmatrix} \ , \ sI - A = s + \frac{۱}{RA}$$

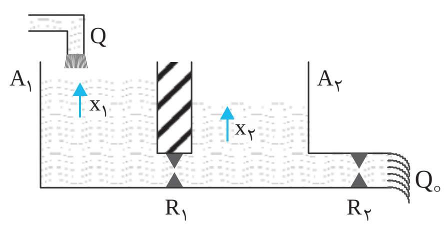
$$G(s) = c(sI - A)^{-۱} b + d \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{Q(s)} = \frac{\frac{۱}{A}}{s + \frac{۱}{RA}} = \frac{R}{RAs + ۱}$$

ب.

$$G(s) = \frac{Q_۰(s)}{Q(s)} = \frac{\frac{X(s)}{R}}{Q(s)} = \frac{۱}{RAs + ۱}$$

مثال ۸.۲ تابع تبدیل سیستم سیالاتی زیر را با فرض $Q_۰$ خروجی سیستم، به دست آورید.

به روش مشابه مثال ۷.۲ می‌توان به تابع تبدیل سیستم دست یافت.



$$G(s) = \frac{Q_۰(s)}{Q(s)} = \frac{۱}{R_۱A_۱R_۲A_۲s^۲ + (R_۱A_۱ + R_۲A_۲ + R_۲A_۱)s + ۱}$$

۲.۱.۳.۲.۲ تابع تبدیل سیستم‌های MIMO

سیستم‌های $MIMO$ شامل r ورودی و m خروجی هستند، لذا تابع تبدیل به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$\underset{m\times ۱}{Y(s)} = \underset{m\times r}{G(s)} \cdot \underset{r\times ۱}{U(s)} \tag{۵.۲}$$

به عبارتی تابع تبدیل به صورت ماتریس $m\times r$ تعریف می‌شود و شامل $m\times r$ المان است.

$$\underset{m\times r}{G(s)} = \underset{m\times n}{C} \underset{n\times n}{(sI - A)^{-۱}} \underset{n\times r}{B} + \underset{m\times r}{D} \tag{۶.۲}$$

ملاحظه می‌شود رابطه تابع تبدیل مشابه سیستم‌های $SISO$ است.

چون هر المان تابع تبدیل نسبت یک خروجی به یک ورودی خاص است، پس می‌توان نوشت:

$$G_{ji} = \left.\frac{y_j}{u_i}\right|_{u_r = ۰} \ ; \quad r \neq i \tag{۷.۲}$$

سیستم شماره ۱: اگر ورودی u به مخزن ۱ اعمال شود چون خروجی $x_۱$ نیز مربوط به مخزن ۱ می‌باشد لذا عملاً مخزن ۲ از رده خارج می‌شود ولی چون ورودی u به مخزن ۲ اثر می‌کند به این سیستم کنترل‌پذیر گفته می‌شود اما چون خروجی از مخزن ۲ تأثیر نمی‌بینید مشاهده‌پذیر نیست.این سیستم رسته یک است.

سیستم شماره ۲: مشابه سیستم شماره ۱ کنترل‌پذیر است اما چون خروجی $x_۲$ از مخزن ۱ نیز تأثیر می‌بیند مشاهده‌پذیر است. این سیستم، رسته ۲ است.

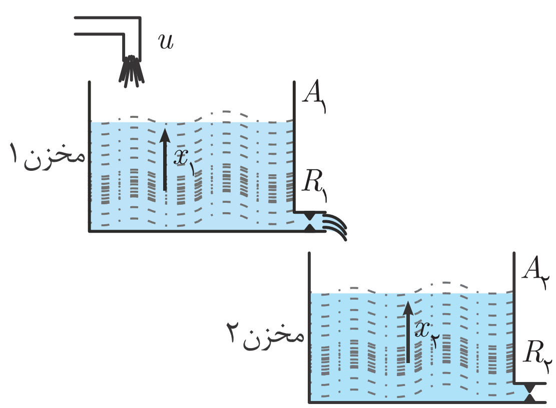
سیستم شماره ۳: چون ورودی u به مخزن ۲ اعمال می‌شود. مخزن ۱ هیچ تأثیری از ورودی u نمی‌بیند و عملاً تحت کنترل نیست پس سیستم کنترل‌ناپذیر است و مشابه سیستم شماره ۱، مشاهده ناپذیر است و به عبارتی سیستم، رسته صفر است.

سیستم شماره ۴: مشابه سیستم شماره ۳ کنترل‌ناپذیر و مشابه سیستم شماره ۲ مشاهده‌پذیر است. این سیستم رسته یک است. از بین این چهار سیستم، سیستم شماره ۲ که هم کنترل‌پذیر و هم مشاهده‌پذیر است، مناسب‌ترین سیستم کنترلی بوده این سیستم رسته دو است.

حال با توجه به این اطلاعات بدست آمده و برای تأیید روابط مربوط به کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری، سیستم‌های شماره ۲ و ۳ را بررسی می‌کنیم.

سیستم شماره ۲: ورودی به مخزن ۱ اعمال شده و خروجی ارتفاع مخزن ۲ $(x_۲)$ می‌باشد.

فرض کنید $\begin{matrix} A_۱ = A_۲ = ۱ \\ R_۱ = R_۲ = ۱ \end{matrix}$

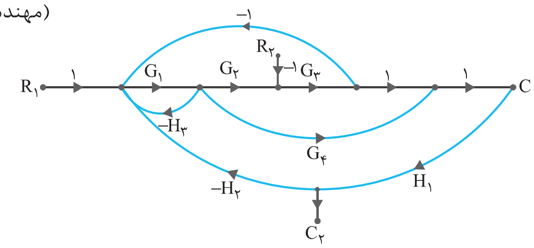


معادلات وضعیت عبارتند از:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_۱ = -x_۱ + u \\ \dot{x}_۲ = x_۱ - x_۲ \\ y = x_۲ \end{array}\right. \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۶۶- تابع تبدیل $\frac{C_۲(s)}{R_۲(s)}$ گراف گذر سیگنال SFG (Signal Flow Graph) زیر کـدام اسـت؟

(مهندسی برق- سراسری ۸۰)



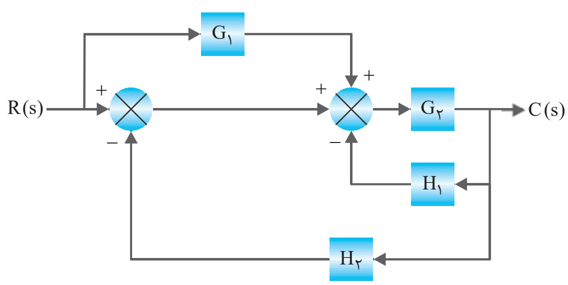
۱) $\frac{-G_۳H_۱\left(۱+G_۱H_۳\right)}{۱+G_۱H_۳+G_۱G_۲G_۳+G_۱G_۲G_۳H_۱H_۲}$

۲) $\frac{-G_۳H_۱\left(۱+G_۱H_۳\right)+G_۳G_۱G_۴H_۱}{۱+G_۱H_۳+G_۱G_۲G_۳+G_۱G_۲G_۳H_۱H_۲+G_۱G_۴H_۱H_۲}$

۳) $\frac{G_۳H_۱\left(۱+G_۱H_۳\right)+G_۳G_۱G_۴H_۱}{۱+G_۱H_۳+G_۱G_۲G_۳+G_۱G_۲G_۳H_۱H_۲+G_۱G_۴H_۱H_۳}$

۴) $\frac{-G_۳H_۱\left(۱+G_۱H_۳\right)+G_۳G_۱G_۴H_۱}{۱+G_۱H_۳+G_۱G_۲G_۳+G_۱G_۲G_۳H_۱H_۲}$

۶۷- تابع تبدیل دیاگرام بلوکی مقابل چیست؟ (مهندسی مکانیک- سراسری ۸۰)



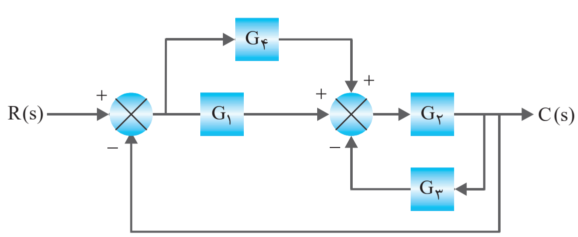
۱) $\frac{G_۱+G_۱G_۲}{۱+G_۲\left(H_۱+H_۲\right)}$

۲) $\frac{G_۱+G_۱G_۲}{۱+G_۲H_۱+G_۱H_۲}$

۳) $G_۱+\frac{G_۲}{۱+G_۲H_۱H_۲}$

۴) $G_۱G_۲+\frac{G_۲}{۱+G_۲\left(H_۱+H_۲\right)}$

۶۸- تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ برای دیاگرام بلوکی زیر عبارت است از: (مهندسی هوافضا- آزاد ۸۱)



۱) $\frac{G_۱G_۲+G_۱G_۴}{۱+G_۱G_۲+G_۲G_۳}$

۲) $\frac{G_۱G_۲}{۱+G_۱G_۲+G_۲G_۳}$

۳) $\frac{G_۱G_۲+G_۲G_۴}{۱+G_۱G_۲+G_۲G_۳+G_۲G_۴}$

۴) $\frac{G_۱G_۲}{۱+G_۱G_۲+G_۲G_۳+G_۲G_۴}$

۹۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{cases} P_۱ = ۴۸ \\ P_۲ = ۱۰۵ \\ P_۳ = ۱۴ \\ P_۴ = ۱۴۴ \\ P_۵ = -۱۹۲ \\ P_۶ = -۱۶۸ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \ell_۱ = -۲\times ۵ = -۱۰ \\ \ell_۲ = -۱\times ۴ = -۴ \\ \ell_۳ = ۱\times -۲\times ۸\times -۱ = ۱۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta = ۱-(\ell_۱+\ell_۲+\ell_۳)+(\ell_۱\ell_۲) = ۳۹ \\ \Delta_۱ = ۱-\ell_۱ = ۱+۱۰ = ۱۱ \\ \Delta_۲ = ۱-\ell_۲ = ۱+۴ = ۵ \\ \Delta_۳ = \Delta_۴ = \Delta_۵ = \Delta_۶ = ۱ \end{cases}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_k\Delta_k}{\Delta} = \frac{۴۸\times ۱۱+۱۰۵\times ۵+۱۴+۱۴۴-۱۹۲-۱۶۸}{۳۹} = \frac{۸۵۱}{۳۹}$$

۹۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{cases} P_۱ = G_۱G_۲G_۳ \\ \ell_۱ = -G_۱G_۲G_۳ \\ \ell_۲ = G_۱G_۲H_۱ \\ \ell_۳ = -G_۲G_۳H_۲ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \Delta = ۱-(\ell_۱+\ell_۲+\ell_۳) \\ \Delta_۱ = ۱ \end{cases}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_۱\Delta_۱}{\Delta} = \frac{G_۱G_۲G_۳}{۱-G_۱G_۲H_۱+G_۲G_۳H_۲+G_۱G_۲G_۳}$$

۹۴- گزینه «۲» صحیح است.

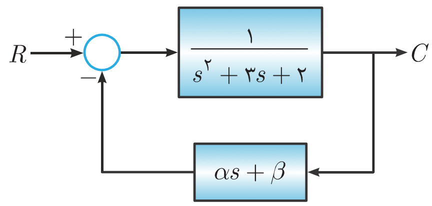
$$u = ۲u+R-C$$
$$u = C-R$$

۹۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{۱}{s^۳}}{۱-\left(\frac{-۱}{s}-\frac{۱}{s^۲}-\frac{k}{s^۳}-\frac{۱}{s}\right)+\frac{۱}{s^۲}} = \frac{۱}{s^۳+۲s^۲+۲s+k}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{\frac{۱}{s}\left(۱-\left(\frac{-۱}{s}\right)\right)}{۱-\left(\frac{-۱}{s}-\frac{۱}{s^۲}-\frac{k}{s^۳}-\frac{۱}{s}\right)+\frac{۱}{s^۲}} = \frac{s^۲+s}{s^۳+۲s^۲+۲s+k}$$

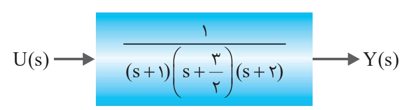
۳- به ازاء چه مقادیری از α و β سیستم کنترلی زیر دارای پاسخ نوسانی بدون میرایی خواهد بود؟ (تألیفی)

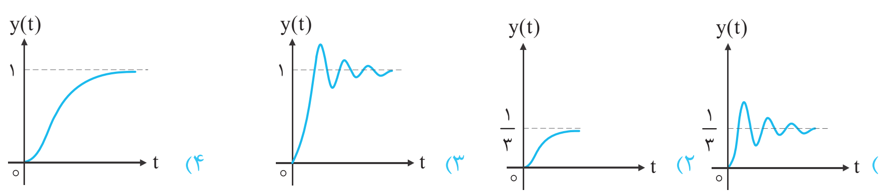


۱) $\alpha > -۳\ ,\ \beta = -۲$ ۲) $\alpha = -۳\ ,\ \beta < -۲$

۳) $\alpha < -۳\ ,\ \beta = -۲$ ۴) $\alpha = -۳\ ,\ \beta > -۲$

۴- کدام یک از چهار پاسخ زیر نمایش تقریبی عکس‌العمل $y(t)$ سیستم شکل مقابل نسبت به ورودی $u(t)$ (تابع پله‌ای واحد) می‌باشد؟ (مهندسی مکانیک- سراسری ۷۰)





۵- در صورتی که تابع تبدیل یک سیستم فیدبک به صورت: (مهندسی مکانیک- سراسری ۷۲)

$$G(s)=\frac{۱۶۳۸\left(s^{۲}+۲/۶s+۱/۶۵\right)}{(s+۳۲/۴)(s+۰/۸۵۵+j۰/۶۷۲)(s+۰/۸۵۵-j۰/۶۷۲)(s+۵/۲۴+j۶/۵۶۶)(s+۵/۲۴-j۶/۵۶۶)}$$

باشد (damping ratio) این سیستم فیدبک

۱) $\zeta = ۰/۶۲۴$ خواهد بود.

۲) $\zeta = ۰/۸۱۲$ خواهد بود.

۳) $\zeta = ۰/۷۸۶$ خواهد بود.

۴) این سیستم به صورت یک سیستم درجه اول رفتار می‌کند.

الف. معادله مشخصه مدار بسته $s^{۳}+ks^{۲}+(\beta+۲)s+\beta+۱=۰$

شرط پایداری : $k(\beta+۲)>\beta+۱\Rightarrow k>\dfrac{\beta+۱}{\beta+۲}$

رابطه برقرار است پس پاسخ مثبت و سیستم پایدار است. $k=\dfrac{۲}{۳}\,,\ \beta=\dfrac{۳}{۴}\Rightarrow\dfrac{۲}{۳}>\dfrac{\frac{۳}{۴}+۱}{\frac{۳}{۴}+۲}=\dfrac{۷}{۱۱}$

ب.

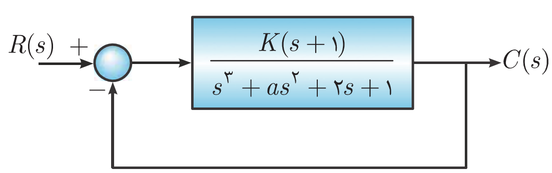
معادله کمکی

$$\begin{array}{c|ll}
s^{۳} & ۱ & \beta+۲ \\
s^{۲} & k & \beta+۱ \Rightarrow \dfrac{\beta+۱}{\beta+۲}s^{۲}+\beta+۱=۰\Rightarrow s_{۱,۲}=\pm j\sqrt{\beta+۲} \\
s^{۱} & \dfrac{k(\beta+۲)-(\beta+۱)}{k}=۰\Rightarrow k=\dfrac{\beta+۱}{\beta+۲} & \\
s^{۰} & \beta+۱ &
\end{array}$$

$$\sqrt{\beta+۲}=۴\Rightarrow\beta=۱۴$$

$$k=\frac{\beta+۱}{\beta+۲}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

مثال ۲۰.۴ بررسی کنید آیا در سیستم مدار بسته می‌توان مقادیر $a>۰\,,k>۰$ را طوری بدست آورد که سیستم مدار بسته با فرکانس $۴\mathrm{rad/s}$ نوسان کند؟ اگر پاسخ منفی است دلایل آنرا نوشته و اگر پاسخ مثبت است با ذکر دلیل، مقادیر K و a و تمام مقادیر قطب‌های مدار بسته را بدست آورید.



۱) معادله مشخصه مدار بسته: $\Delta(s)=s^{۳}+as^{۲}+(k+۲)s+k+۱=۰$

$$\begin{array}{c|ll}
s^{۳} & ۱ & K+۲ \\
s^{۲} & a & K+۱ \\
s^{۱} & \dfrac{a(K+۲)-(K+۱)}{a}=۰\Rightarrow a=\dfrac{K+۱}{K+۲} & \\
s^{۰} & K+۱ &
\end{array}
\longrightarrow$$

معادله کمکی $A(s)=\dfrac{K+۱}{K+۲}s^{۲}+K+۱=۰$

$$s_{۱,۲}=\pm\sqrt{K+۲}\,j\equiv\pm۴j$$

$$\Rightarrow K=۱۴, a=\frac{۱۵}{۱۶}$$

$$\begin{array}{l|l}
s^{۳}+\frac{۱۵}{۱۶}s^{۲}+۱۶s+۱۵ & s^{۲}+۱۶ \\ \cline{2-2}
\quad\vdots & s+\frac{۱۵}{۱۶} \\ \cline{1-1}
\quad ۰ &
\end{array}
\Rightarrow$$

قطب‌های مدار بسته : $\pm۴j\,,\ -\dfrac{۱۵}{۱۶}$

۵۳- گزینه «۳» صحیح است.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 1 & 0 \\ s^2 & 0/5 & 1 & \\ s^1 & \dfrac{0/5-2}{0/5}<0 & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

دو تغییر علامت در ستون اول به وجود آمده، بنابراین سیستم شامل دو قطب ناپایدار است.

۵۴- گزینه «۱» صحیح است.

معادله مشخصه : $\Delta(s)=s^4+6s^3+13s^2+20s+k$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 13 & k \\ s^3 & 6 & 20 & 0 \\ s^2 & \dfrac{39-10}{3}=9/7 & k & \\ s^1 & \dfrac{97-3k}{9/7}>0 \longrightarrow & & \overset{\text{شرایط پایداری}}{k<32/3} \\ s^0 & k>0 \longrightarrow & & k>0 \end{array}$$

۵۵- گزینه «۳» صحیح است.

معادله مشخصه : $\Delta(s)=s^3+6s^2+5s+10k$

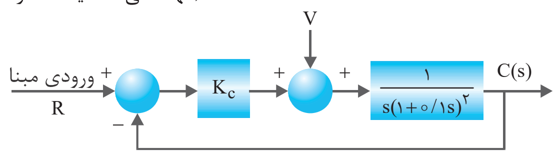
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 3 & 5k \\ s^1 & \dfrac{15-5k}{3}>0 \longrightarrow & k\le 3 \\ s^0 & 5k>0 \longrightarrow & k\ge 0 \end{array}$$

۵۶- گزینه «۴» صحیح است.

معادله مشخصه : $\Delta(s)=(k+1)s^2+(1-2k)s+2k$

شرایط ناپایداری: $1-2k<0 \quad \Rightarrow \quad k>\frac{1}{2}$

۴- در سیستم شکل مقابل با فرض آن که ورودی مبنا یعنی $r(t)$ و ورودی مزاحم یعنی $v(t)$ هر کدام توابع پله‌ای واحد می‌باشند ($v(t)=۱$ و $r(t)$) مقدار k_c را طوری پیدا کنید که اثر ورودی مزاحم در خروجی کم‌تر از ٪۱۰ اثر ورودی مبنا در خروجی در حالت ماندگار (steady state) باشد. (مهندسی مکانیک- سراسری ۷۱)



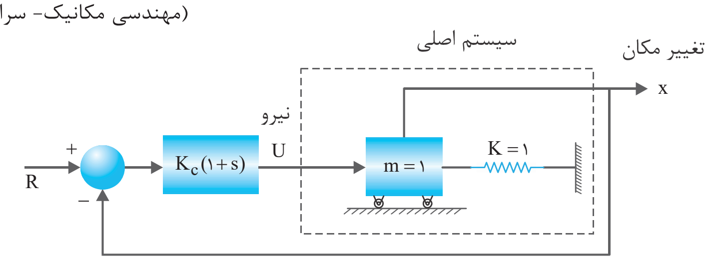
۱) $K_c > ۱۰$

۲) $K_c > ۵$

۳) $K_c > ۲$

۴) $K_c > ۱$

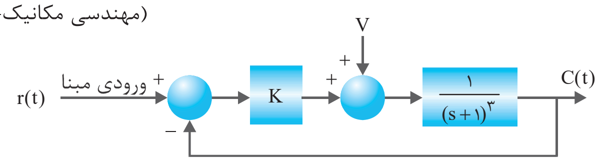
۵- می‌دانیم که سیستم اصلی فنر و وزنه مقابل (بدون دمپر) در مرز پایداری است. برای کنترل و پایدار کردن این سیستم از کنترلر PD-action در مدار بسته شکل مقابل استفاده می‌کنیم. به این ترتیب عکس‌العمل $x(t)$ در سیستم مدار بسته نوسانی مستهلک‌شونده می‌گردد. مقدار K_c را طوری تعیین کنید که نسبت استهلاک ζ (damping ratio) مساوی $\zeta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۷۰۷$ گردد. (مهندسی مکانیک- سراسری ۷۱)



۱) $k_c = ۱+\sqrt{۲}$ ۲) $k_c = ۳+\sqrt{۲}$ ۳) $k_c = ۳-\sqrt{۳}$ ۴) $k_c = ۱+\sqrt{۳}$

۶- در سیستم شکل زیر ورودی مبنا مساوی صفر ورودی مزاحم برابر $V(t)=۱$ (تابع پله‌ای واحد) است. به ازاء $k=۴$ خطای حالت ماندگار $\left(\underset{t\to\infty}{e(t)} = e_{ss}\right)$ عبارت است از:

(مهندسی مکانیک- سراسری-۷۲)



۱) چون ورودی مبنا $r(t)$ مساوی صفر است، پس خطای حالت ماندگار سیستم نیز صفر است.

۲) چون سیستم اصلی از نوع صفر و کنترلر نیز P-action است، پس خطای حالت ماندگار سیستم نیز صفر می‌باشد.

۳) $e_{ss} = ۱$

۴) $e_{ss} = -۰/۲$

۸۶- گزینه «۳» صحیح است.

$$E(s)=R(s)\left[۱-\frac{C}{R}\right]=R(s)\left[۱-\frac{\frac{۲(۱-s)}{s^۲+۲s+۳}}{۱+\frac{۲k(۱-s)}{s^۲+۲s+۳}}\right]=\frac{s^۲+(۴-۲k)s+۱+۲k}{s^۲+(۲-۲k)s+۳+۲k}R(s)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to ۰}sE(s)=\frac{۱+۲k}{۳+۲k}=۰\quad\Rightarrow\quad k=\frac{-۱}{۲}$$

بررسی پایداری سیستم: $\Delta(s)=۱+GH=۰\quad\Rightarrow\quad s^۲+(۲-۲k)s+۳+۲k=۰$

$$\left.\begin{array}{l}۲-۲k>۰\quad\Rightarrow\quad k<۱\\ ۳+۲k>۰\quad\Rightarrow\quad k>-۱/۵\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad -۱/۵<k<۱$$

چون $k=\frac{-۱}{۲}$ در محدوده فوق قرار دارد، پس سیستم بازاء $k=\frac{-۱}{۲}$ نسبت به ورودی پله واحد خطای ماندگار ندارد.

۸۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$E(s)=R(s)\left[۱-\frac{C}{R}\right]$$

$$=R(s)\left[۱-\frac{K}{s^۳+۳s^۲+۲s+K}\right]=\frac{s^۳+۳s^۲+۲s}{s^۳+۳s^۲+۲s+k}R(s)$$

شیب واحد $R(s)=\frac{۱}{s^۲}\quad\Rightarrow\quad e_{ss}=\lim_{s\to ۰}sE(s)=\lim_{s\to ۰}\frac{s^۲+۳s+۲}{s^۳+۳s^۲+۲s+K}=\frac{۲}{K}$

پس گزینه‌های ۱ یا ۴ می‌توانند درست باشند.

بررسی پایداری:

$$\Delta(s)=s^۳+۳s^۲+۲s+K=۰$$

$$\begin{array}{l|ll}
s^۳ & ۱ & ۲\\
s^۲ & ۳ & k\\
s^۱ & \frac{۶-k}{۳}>۰ \longrightarrow & k<۶\\
s^۰ & k>۰ \longrightarrow & k>۰
\end{array}\quad\Rightarrow\quad ۰<k<۶$$

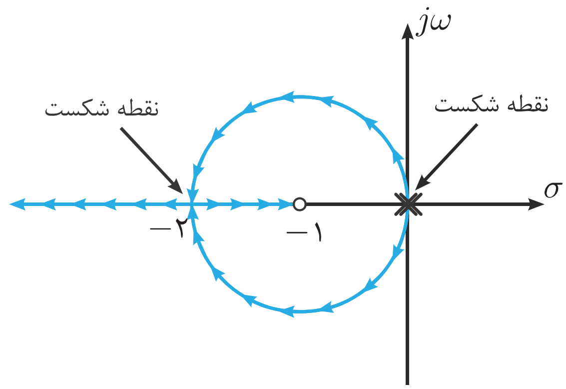
$$L=R-\frac{۱}{s}L-C$$

$$L(۱+\frac{۱}{s})=R-C$$

$$L=\frac{s}{s+۱}(R-C)\neq E(s)=R-C$$

بنابراین گزینه ۴ درست است.

الف.



ب.

$$\text{نقطه شکست } k = \frac{\text{حاصلضرب فواصل از قطب‌ها}}{\text{حاصلضرب فواصل از صفرها}} = \frac{۲\times۲}{۱} = ۴$$

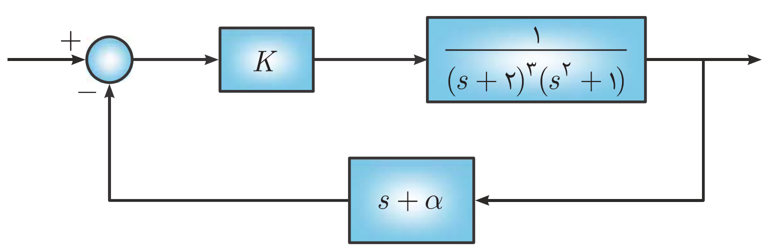
در نقطه -۲ یعنی $k = ۴$، $\zeta = ۱$ است و سیستم بدون نوسان رفتار می‌کند.

بنابراین: $۰ < k < ۴$ رفتار سیستم نوسانی میرا و به ازای $k \geq ۴$ رفتار سیستم بدون نوسان و میرا است.

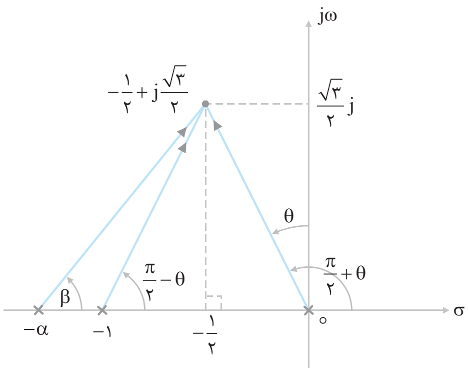
ج. به ازای $k = ۴$ قطب‌های مدار بسته تکرارند و مقادیر آنها -۲ هستند.

د. چون مکان در LHP قراردارد سیستم به ازای جمیع مقادیر $k > ۰$ پایدار است.

مثال ۲۱.۶ در سیستم مدار بسته شکل زیر در صورتی که $K > ۰$ و $\alpha > ۰$ باشد بـه ازای چـه مقـداری از α، قطب‌های غالب مدار بسته در $-۲ \pm j$ قرار می‌گیرند.



شکل ۳۴.۶



شرط زاویه: $۰-\left(\frac{\pi}{۲}+\theta+\frac{\pi}{۲}-\theta+\beta\right)=\pm ۱۸۰$

با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم هیچ مقدار α حقیقی نمی‌تواند به $\beta=۰$ منجر شود. $\Rightarrow \quad \beta=۰$

روش دوم: تحلیلی

معادله مشخصه مدار بسته: $\Delta(s)=۱+\frac{k}{s(s+۱)}\cdot\frac{۱}{s+\alpha}=۰$

$$\Delta(s)=s(s+۱)(s+\alpha)+k=s^۳+(\alpha+۱)s^۲+\alpha s+k=۰$$

این معادله بایستی بر معادله حاصلضرب قطب‌های داده شده، بخش‌پذیر باشد.

$$(s+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}j)(s+\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}j)=s^۲+s+۱$$

$$\begin{array}{l|l}
s^۳+(\alpha+۱)s^۲+\alpha s+k & s^۲+s+۱ \\ \hline
\underline{\pm s^۳\pm s^۲\pm s} & s+\alpha \\
\alpha s^۲+(\alpha-۱)s+k & \\
\underline{\alpha s^۲\pm\alpha s\pm\alpha} & \\
-s+k-\alpha &
\end{array}$$

چون باقیمانده صفر نمی‌شود. گزینه ۴ درست است.

۲۵- گزینه «۴» صحیح است.

تابع تبدیل: $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{s^۲}{s^۵+۴s^۴+۶s^۳+۳s^۲}$

معادله مشخصه: $\Delta(s)=s^۲(s^۳+۴s^۲+۶s+۳)=۰$

$$s^۳+۴s^۲+۶s+۳=۰$$

چون جمع ضرایب توان‌های زوج و جمع ضرایب توان‌های فرد با یکدیگر برابرند پس یک ریشه در -۱ دارد.

$$s^۳+۴s^۲+۶s+۳=(s+۱)(s^۲+۳s+۳)$$

دو ریشه دیگر عبارتند از: $\frac{-۳}{۲}\pm j\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

مناسب b می‌توان محل تلاقی آنها (σ_a) را در LHP نگهداشته و به ازای همه مقادیر $k>۰$ هر سه شاخه مکان هندسی در LHP باقی مانده (هیچگاه محور موهومی را قطع نکرده) و در نتیجه مدار بسته همواره پایدار باشد:

$$\sigma_a = \frac{(-۱-۵-۸)-(-b)}{۲} < ۰ \Rightarrow ۰ < b < ۱۴$$

۹۳- گزینه «۲» صحیح است.

صفر حقیقی ۱ در RHP که از گزینه‌ها مشخص می‌شود، نشان دهنده سیستم غیر مینیمم فاز بوده و چون محور حقیقی مثبت یکی از دو مجانب است، فیدبک مثبت می‌باشد.

۹۴- گزینه «۲» صحیح است.

تابع تبدیل سیستم جرم و فنر $G_p(s)=\frac{۱}{s^۲+۱}$

معادله مشخصه مدار بسته: $۱+\frac{G_c(s)}{s^۲+۱}=۰ \Rightarrow s^۲+G_c(s)+۱=(s+۳)^۲=s^۲+۶s+۹$

$$G_c(s)=۶s+۸=K_p(۱+T_d s)\ , K_p=۸\ ,\ T_d=\frac{۳}{۴}$$

۹۵- گزینه «۴» صحیح است.

معادله مشخصه $\Delta(s)=s(s+۱)(s+۲)+k=۰$

$$s^۳+۳s^۲+۲s+k=۰$$

معادله درجه ۳:

مرز پایداری $k=۶$

معادله کمکی $۳s^۲+k=۰$

$$۳s^۲+۶=۰ \Rightarrow s_{۱,۲}=\pm j\sqrt{۲}$$

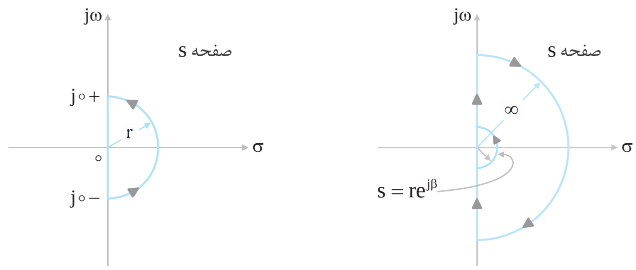
فرکانس نوسانات $=\sqrt{۲}\ \frac{rad}{sec}$

۹۶- گزینه «۴» صحیح است.

۹۷- گزینه «۲» صحیح است.

سیستم مدار باز دارای یک صفر در ۱۰− و سه قطب در ۰، ۳− و $-b$ است بنابراین مکان هندسی ریشه‌ها دارای دو مجانب است و کمترین مقدار b را باید در شرایطی بدست‌آوریم که محل برخورد مجانب‌ها در مبدأ مختصات باشند:

$$\sigma_a=\frac{(۰-۳-b)-(-۱۰)}{۲}=۰ \Rightarrow b=۷$$



شکل ۲۲.۷ کنتور بسته اصلاح شده در مجاورت مبدأ مختصات

Z : تعداد قطب‌های ناپایدار مدار بسته و یا به عبارتی تعداد قطب‌های مدار بسته واقع در RHP.

طبق معیار پایداری نایکوئیست:

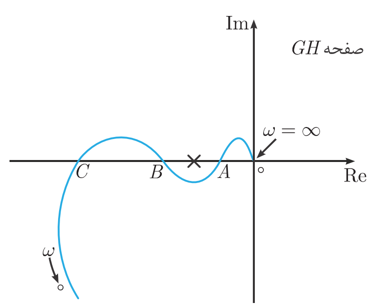
الف. سیستم مدار بسته پایدار است اگر $Z = \circ$، یعنی $N = P$ به عبارتی اگر $P = \circ$ باشد منحنی نگاشت نیز نقطه $-۱+ j\text{o}$ را دور نزند و از طرفی اگر مدار باز به تعداد P قطب ناپایدار دارد منحنی نایکوئیست بایستی به تعداد N بار خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول نقطه $-۱+ j\text{o}$ چرخش کند.

ب. سیستم مدار بسته ناپایدار است اگر $Z \neq \circ$، یعنی $N \neq P$. از طرفی اگر دوران منحنی نگاشت حول $-۱+ j\text{o}$ در جهت عقربه‌های ساعت باشد مدار بسته ناپایدار است.

ج. سیستم در مرز پایداریست اگر منحنی نایکوئیست از نقطه $-۱+ j\text{o}$ عبور کند.

۱.۴.۷ سیستم‌های پایدار مشروط[۱]

شکل (۲۳.۷) مثالی از منحنی $G(j\omega)H(j\omega)$ را برای سیستم مدار بسته‌ای نشان می‌دهد که با تغییر در بهره مدار باز ناپایدار می‌شود.



شکل ۲۳.۷ منحنی قطبی سیستم پایدار مشروط

اگر بهره مدار باز به اندازه کافی افزایش یابد، منحنی $G(j\omega)H(j\omega)$ نقطه $-۱+ j\text{o}$ را دو بار دور می‌زند و سیستم ناپایدار می‌شود. اگر بهره مدار باز به اندازه کافی کاهش یابد، مجدداً منحنی $G(j\omega)H(j\omega)$

۱- Conditionally stable systems

در بخش (۱.۳.۷) دیدیم که برای سیستم مینیمم فاز، زاویه فاز در $\omega = \infty$ برابر است با $(n-m)(-۹۰^\circ)$. برای سیستم نامینیمم فاز این رابطه صادق نیست. در هر دو سیستم شیب منحنی دامنه در $\omega = \infty$ برابر است با $(n-m)(-۲۰)\frac{db}{dec}$.

بنابراین یک روش تجربی در پیدا کردن آن که سیستم مینیمم فاز یا نامینیمم فاز است آن است که شیب مجانب فرکانس‌های بالای منحنی دامنه و منحنی فاز را در $\omega = \infty$ چک کنیم. اگر شیب منحنی دامنه وقتی $\omega \to \infty$ برابر با $(n-m)(-۲۰)\frac{db}{dec}$ و زاویه فاز برابر با $(n-m)(-۹۰^\circ)$ باشند سپس سیستم مینیمم فاز است.

سیستم‌های نامینیمم فاز پاسخ آهسته‌ای به دلیل رفتار ناقص آن‌ها در شروع پاسخ دارند. در اکثر سیستم‌های کنترلی عملی، اگر سرعت سریع پاسخ اهمیت داشته باشد، از اجزاء نامینیمم فاز استفاده نمی‌شود یک مثال مرسوم از اجزاء نامینیمم فاز در سیستم کنترلی، تأخیر انتقال[۱۲] است.

۴.۵.۷ منحنی بُود توابع شامل تأخیر انتقال

تأخیر انتقال، رفتار نامینیمم فاز داشته و دارای تأخیر فاز شدید در فرکانس‌های بالاست. چنین تأخیر انتقالی در سیستم‌های حرارتی، سیالاتی و نیوماتیکی اتفاق می‌افتد. تابع تأخیر انتقال زیر را در نظر بگیرید:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} \quad (۳۸.۷)$$

اندازه‌اش مساوی واحد است.

$$\left|G(j\omega)\right| = \left|\cos\omega t - j\sin\omega T\right| = ۱ \quad (۳۹.۷)$$

بنابراین، منحنی دامنه بُود $e^{-j\omega T}$ برابر است با ۰db. زاویه فاز تأخیر انتقال برابر است با:

$$\angle G(j\omega T) = -\omega T \text{ (rad)} = -۵۷/۳\omega T \text{ (deg)} \quad (۴۰.۷)$$

زاویه فاز به صورت خطی با فرکانس ω تغییر می‌کند. منحنی زاویه فاز تأخیر انتقال در شکل (۴۱.۷) نشان داده شده است.

۱- Transport Lag

$$M=\left(\frac{C_۰}{U_۰}\right)=\left|G\left(j\omega\right)\right|\ ,\ \phi=\angle G\left(j\omega\right)$$

با توجه به تحریک $U\left(t\right)=۲\sin\frac{t}{۲}$

$$\omega=\frac{۱}{۲}\ ,\ U_۰=۲$$

$$G\left(\frac{۱}{۲}j\right)=\frac{۵}{۱+j}$$

$$M\left|G\left(\frac{۱}{۲}j\right)\right|=\frac{۵}{\sqrt{۲}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

$$C_۰=M\times U_۰=۲\times\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=۵\sqrt{۲}=\sqrt{۵۰}$$

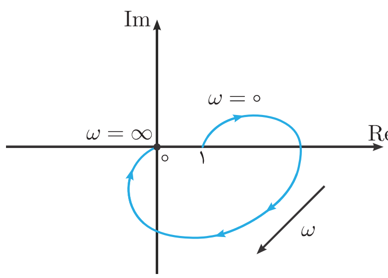
$$\phi\angle G\left(j\omega\right)=\angle\frac{۵}{۱+j}$$

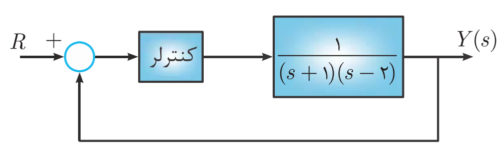
$$\phi=۰-\log^{-۱}\left(۱\right)=-\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

$$C\left(t\right)=\sqrt{۵۰}\sin\left(\frac{۱}{۲}t-\frac{\pi}{۴}\right)$$

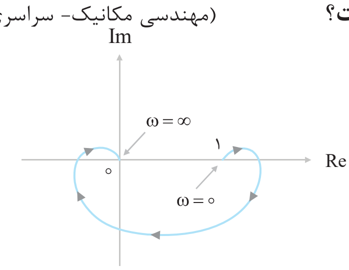
مثال ۳۵.۷ سیستم کنترل حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید: کدام یک از کنترلرهای داده شده می‌تواند سیستم مدار بسته را پایدار نماید؟





۱) K ۲) Ks ۳) $K\left(۱+\frac{۱}{Ts}\right)$ ۴) $K\left(۱+Ts\right)$

۳۸- دیاگرام نایکوئیست سیستمی با تابع تبدیل $G(s)=\frac{1+Ts}{(1+s)^{3}}$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره T صحیح است؟ (مهندسی مکانیک- سراسری ۸۲)



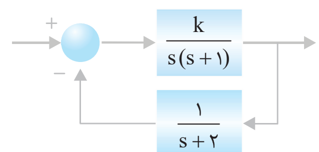
۱) $T>\sqrt{3}$

۲) $T>1$

۳) $T>3$

۴) $\sqrt{3}<T<3$

۳۹- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سیستم کنترل روبه‌رو صحیح است؟
(مهندسی مکانیک- سراسری ۸۲)



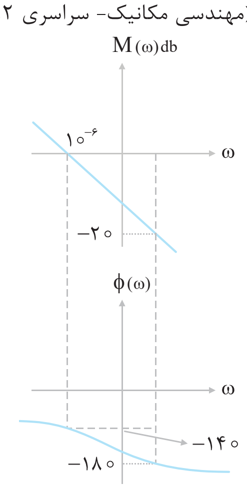
۱) به ازاء $K=6$ حد فاز ۹۰ درجه و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=100\%$ می‌باشد.

۲) به ازاء $K=6$ حد فاز صفر درجه و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=0$ می‌باشد.

۳) به ازاء $K=6$ حد فاز ۹۰ درجه و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=0$ می‌باشد.

۴) به ازاء $K=6$ حد فاز صفر درجه و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=100\%$ می‌باشد.

۴۰- دیاگرام بُود (Bode) یک سیستم کنترل در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقادیر حد فاز (Phase Margin) و حد تقویت (Gain Margin) برای این سیستم کنترل برابر است:
(مهندسی مکانیک- سراسری ۸۲)



۱) 40° و -20db

۲) 40° و 20db

۳) 140° و -20db

۴) 140° و 20db

$$G(s) = ۱۰۰۰ \times s \times \frac{۱}{۱+s} \times \frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱۰}s} = \frac{۱۰۰۰s}{s(s+۱)(s+۱۰)}$$

گزینه ۳ با تغییر ۱۰۰۰ به ۱۰۰۰۰ درست است که گزینه سازمان سنجش نیز بوده است.

۱۹- گزینه «۴» صحیح است.

دایره‌ای به شعاع a به مرکز مبدأ مختصات: $|G(s)| = |ae^{SL}| = a$

۲۰- گزینه «۲» صحیح است.

$$G \cdot M \cdot = \frac{۱}{M(\omega_p)} \quad ; \quad G(s) = \frac{k}{s(s+۱)(s+۲)}$$

$$\phi(\omega_p) = -۹۰^\circ - \tan^{-۱}\omega_p - \tan^{-۱}\frac{\omega_p}{۲} = -۱۸۰ \Rightarrow \omega_p = ۱/۴۱$$

$$M(\omega_p) = \frac{k}{\omega_p\sqrt{(\omega_p^۲+۱)(\omega_p^۲+۴)}}$$

$$G \cdot M \cdot = \frac{۱}{M(\omega_p)} = \frac{(۱/۴۱)\sqrt{(۱/۴۱^۲+۱)(۱/۴۱^۲+۴)}}{k} = ۲ \Rightarrow k = ۲/۹۸ \simeq ۳$$

۲۱- گزینه «۱» صحیح است.

$G \cdot M \cdot , P \cdot M \cdot < ۰ \Leftarrow$ فرکانس محل تلاقی منحنی فاز با زاویه -۱۸۰° : $\omega_g > \omega_p$ فرکانس محل تلاقی منحنی دامنه با محور فرکانس و سیستم ناپایدار است. بنابراین به ورودی محدود، خروجی نامحدود خواهد داشت.

۲۲- گزینه «۴» صحیح است.

$$k = \frac{۱}{۰/۵} = ۲ \Rightarrow \text{محدوده پایداری: } ۰ < k < ۲$$

$$\text{نوع سیستم} = \frac{\text{زاویه شروع}}{-۹۰} = \frac{-۹۰}{-۹۰} = ۱$$

۲۳- گزینه «۳» صحیح است.

$$G \cdot M \cdot = \frac{۱}{M(\omega_p)} \quad ; \quad G(j\omega) = \frac{۸}{(j\omega)(j\omega+۲)^۲} \quad ; \quad \phi(\omega_p) = -۹۰ - ۲\tan^{-۱}\frac{\omega_p}{۲} = -۱۸۰$$

$$\Rightarrow \omega_p = ۲ \quad ; \quad M(\omega_p) = \frac{۸}{\omega_p(\omega_p^۲+۴)} = \frac{۸}{۲(۴+۴)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow G \cdot M \cdot = \frac{۱}{M(\omega_p)} = ۲$$

۲۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\text{شیب اولیه منحنی دامنه} = \frac{AO\,(db)}{۲\,(dec)} = ۲۰\frac{db}{dec} \Rightarrow \text{سیستم نوع یک است.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times (8) \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - 2 - 48 = -49$$

انتخاب سطر یا ستون مناسب برای محاسبه دترمینان با استفاده از این روش، وابسته به مقادیر درایه‌های آن است. به عنوان مثال اگر تعداد درایه‌های صفر یک سطر یا یک ستون زیاد باشد، بهتر است از آن سطر یا ستون برای بسط استفاده کنیم. مثلاً در ماتریس زیر، بهتر است از ستون اول برای بسط استفاده کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} (1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} (0) \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} (0) \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

روش دوم: روش گوس

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی، خواصی وجود دارد که به اعمال مقدماتی سطری و ستونی مشهور بوده و عموماً از روش بسط لاپلاس ثابت می‌شود. تعدادی از این خواص به شرح زیر هستند:

۱. جابجا کردن دو سطر (یا دو ستون) ماتریس، مقدار دترمینان را قرینه می‌کند. در مثال زیر جای سطر اول و دوم عوض شده است:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

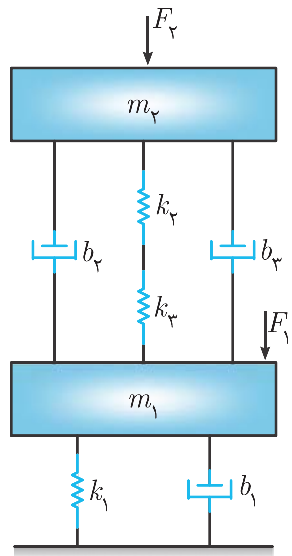
۲. اگر تمام درایه‌های یک سطر (یا ستون) ماتریس در عددی مانند k ضرب شود، حاصل دترمینان نیز k برابر می‌شود. در مثال زیر سه برابر بودن درایه‌های متناظر سطر دوم ماتریس سمت چپ، نسبت به سطر دوم ماتریس سمت راست، تعداد دترمینان آن را نیز سه برابر کرده است:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

۳. اگر ضریب ثابتی از درایه‌های یک سطر (یا ستون) ماتریس به سطر (یا ستون) دیگری اضافه شود، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. در مثال زیر، پنج برابر سطر اول به سطر سوم اضافه شده است:

پاسخ نمونه سوال:۳

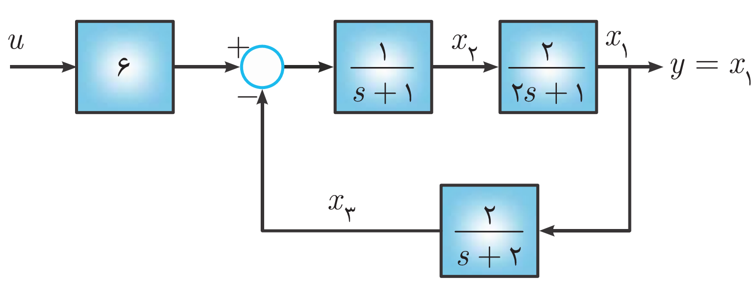
.۱

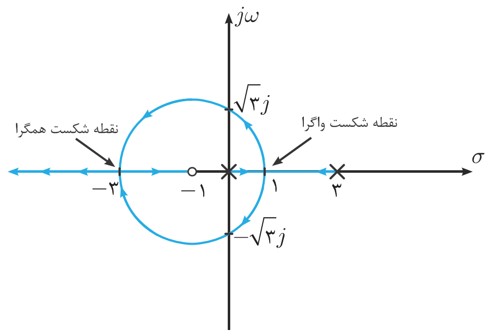


.۲

$$P_۱ = \frac{۱}{s}, P_۲ = \frac{-۱}{s}, P_۳ = -\frac{۱}{s^۲}$$
$$l_۱ = -\frac{۲}{s}, l_۲ = -\frac{۱}{s}, l_۳ = -\frac{۱}{s}$$
$$\Delta = ۱ - (l_۱ + l_۲ + l_۳) + l_۱l_۲ + l_۱l_۳ + l_۲l_۳ - l_۱l_۲l_۳$$
$$\Delta_۱ = ۱ - (l_۱ + l_۳) + l_۱l_۳; \Delta_۲ = ۱ - (l_۲ + l_۳) + l_۲l_۳; \Delta_۳ = ۱ - l_۱$$
$$G(s) = \frac{P_۱\Delta_۱ + P_۲\Delta_۲ + P_۳\Delta_۳}{\Delta} = \frac{-۱}{s^۳ + ۴s^۲ + ۵s + ۲}$$

.۳





نقاط شکست :

$$k=-\frac{s(s-۳)}{s+۱}=\frac{-s^{۲}+۳s}{s+۱}\Rightarrow\frac{dk}{ds}=\frac{(-۲s+۳)(s+۱)-(-s^{۲}+۳s)}{(s+۱)^{۲}}=۰$$

$-s^{۲}-۲s+۳=۰$ یا $s^{۲}+۲s+۳=۰\Rightarrow s_{۱,۲}=-۱\pm\sqrt{۴}\Rightarrow s=۱$ و -۳ نقطه شکست ۲

ب.

معادله مشخصه مدار بسته :

$$s^{۲}+(k-۳)s+k=۰$$

اگر k=3 ریشه های معادله مدار بسته موهومی خالص بوده و رفتار سیستم کاملا نوسانی است.

اگر $K=۳\Rightarrow s^{۲}+k=۰\Rightarrow s^{۲}+۳=۰\Rightarrow s_{۱,۲}=\pm\sqrt{۳j}$

فرکانس نوسان

$$\sqrt{۳}\,\frac{rad}{s}$$

ج) معادله مشخصه ی مدار بسته $s^{۲}+(k-۳)s+k=۰$ درجه دو است. برای پایداری تمام ضرایب بایستی مثبت باشند بنابرین:

محدوده k برای ناپایداری: $۰<k<۳$

مقدار k برای مرز پایداری: $K=۳$

محدوده k برای پایداری

$$k>۳$$

پیوست ۴

جدول تبدیل لاپلاس

جدول ج.۱ تبدیل لاپلاس توابع

	$f(t)$	$F(s)$
۱	ضربه واحد $\delta(t)$	۱
۲	پله واحد $۱(t)$	$\frac{۱}{s}$
۳	t	$\frac{۱}{s^{۲}}$
۴	$\frac{t^{n-۱}}{(n-۱)!}\ (n=۱,۲,۳,\ldots)$	$\frac{۱}{s^{n}}$
۵	$t^{n}\ (n=۱,۲,۳,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n}+۱}$
۶	e^{-at}	$\frac{۱}{s+a}$
۷	te^{-at}	$\frac{۱}{(s+a)^{۲}}$
۸	$\frac{۱}{(n-۱)!}t^{n-۱}e^{-at}\quad (n=۱,۲,۳,\ldots)$	$\frac{۱}{(s+a)^{n}}$
۹	$t^{n}a^{-at}\ \ (n=۱,۲,۳,\ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+۱}}$
۱۰	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^{۲}+\omega^{۲}}$
۱۱	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^{۲}+\omega^{۲}}$
۱۲	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^{۲}-\omega^{۲}}$