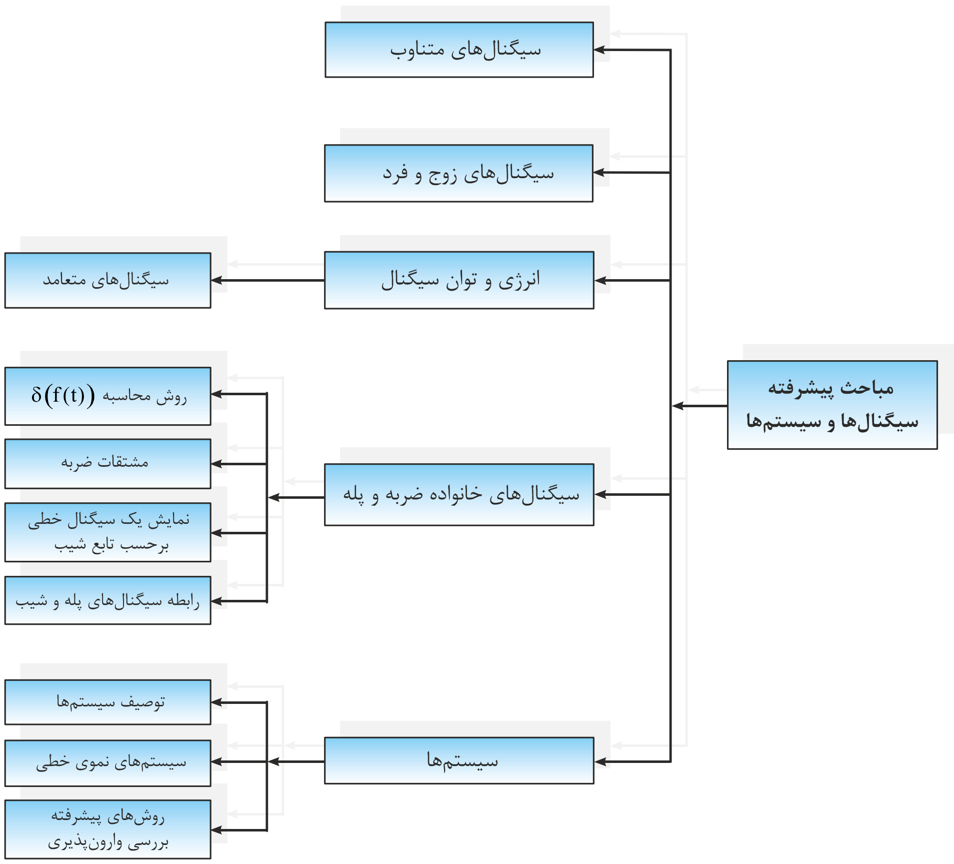
فهرست مطالب

فصل دهم

مباحث پیشرفته سیگنال‌ها و سیستم‌ها



مقدمه

در این فصل به مباحث پیشرفته مربوط به تحلیل سیگنال‌ها و بررسی خواص سیستم‌های پیچیده‌تر و همچنین به تعاریف و مفاهیم جدیدتری خواهیم پرداخت. در واقع این فصل مکمل فصل‌های اول و دوم می‌باشد و فرض بر این است که خواننده گرامی، بر مطالب بیان شده در جلد اول کتاب تسلط کامل دارد.[۱]

سیگنال‌های متناوب

همان‌طور که در فصل اول نیز اشاره کردیم، تساوی $x\big(f(t+T)\big)=x\big(f(t)\big)$ به معنی متناوب بودن سیگنال $x\big(f(t)\big)$ با دوره تناوب T است و بالعکس؛ اما تساوی $x\big(f(t)+T\big)=x\big(f(t)\big)$ لزوماً به معنی متناوب بودن $x\big(f(t)\big)$ نیست. مثلاً وقتی می‌گوییم سیگنال $x(t^{۲})$ با دوره تناوب $T=۳$ متناوب است، آن‌گاه می‌توان تساوی $x\big((t+۳)^{۲}\big)=x(t^{۲})$ را نتیجه گرفت که می‌گوید اگر $x(t^{۲})$ را به مقدار ۳ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، برابر خودش می‌شود؛ و لزوماً نمی‌توان تساوی $x(t^{۲}+۳)=x(t^{۲})$ را نتیجه گرفت. حال می‌خواهیم نکته مرتبط دیگری را بیان کنیم که علاوه بر اینکه کاربرد و استفاده نسبتاً زیادی در قسمت‌های مختلف درس دارد، به‌طور خاص نیز می‌تواند مورد سؤال واقع شود.

نکته ۸٤: اگر $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، آنگاه $x\big(f(t)\big)$ لزوماً متناوب نیست، بنابراین رابطه $x\big(f(t+T)\big)=x\big(f(t)\big)$ لزوماً برقرار نمی‌باشد؛ ولی تساوی $x\big(f(t)+T\big)=x\big(f(t)\big)$ حتماً برقرار است. $f(t)$ می‌تواند هر سیگنال دلخواهی باشد.

$$x(t) \text{ متناوب با } T \longrightarrow x(t+T)=x(t) \Rightarrow \begin{cases} x\big(f(t)+T\big)=x\big(f(t)\big) \\ x\big(f(t+T)\big)\overset{?}{=}x\big(f(t)\big) \end{cases}$$

به عنوان مثال سیگنال $x(t)=\sin t$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ متناوب است؛ ولی با فرض $f(t)=t^{۲}$، سیگنال $x\big(f(t)\big)=x(t^{۲})=\sin(t^{۲})$ متناوب نیست، بنابراین رابطه $\sin\big((t+۲\pi)^{۲}\big)=\sin(t^{۲})$ برقرار نمی‌باشد، ولی طبق تساوی $x\big(f(t)+T\big)=x\big(f(t)\big)$، رابطه $\sin(t^{۲}+۲\pi)=\sin(t^{۲})$ برقرار است. در واقع می‌توان گفت که چون ماهیت تابع sin متناوب است، پس به‌ازای هر θ، رابطه $\sin(\theta+۲\pi)=\sin(\theta)$ برقرار است؛ اگرچه تابع $\sin(\theta)$ ممکن است خود متناوب نباشد.

اثبات: اگر $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، آن‌گاه طبق تعریف، $x(t)=x(t+T)$ می‌باشد که t متغیر است و هر چیزی می‌توان به جای آن قرار داد. حال با جایگذاری $f(t)$ به جای t در دو طرف این تساوی، به رابطه $x\big(f(t)+T\big)=x\big(f(t)\big)$ خواهیم رسید. در واقع این نکته بیان می‌کند که اگر سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، با تغییر آرگومان آن، اگرچه لزوماً متناوب نخواهد بود، اما اگر کل آرگومانش را با T جمع نماییم، برابر خودش می‌شود، زیرا ماهیت سیگنال x، متناوب است. این نکته در حالت زمان‌گسسته نیز صادق است.

[۱] مانند جلد اول، اثبات بعضی از نکات و فرمول‌ها به جهت اهمیت آن‌ها در کتاب بیان شده است. اما به منظور جلوگیری از بالا رفتن حجم کتاب، تصمیم گرفته شد اثبات‌هایی که از اهمیت کمتری برخوردارند، در سایت مؤلف (منوی کتاب ـ پشتیبانی کتاب) ارائه گردد. توصیه می‌شود اگر علاقه‌مند هستید و تمایل به تسلط بیشتری بر روی مفاهیم این درس دارید، اثبات‌ها را نیز دریافت و مطالعه نمایید. در بعضی مواقع، روش‌ها و مفاهیمی که در اثبات‌ها بیان شده است می‌تواند در درک بهتر درس، مفید واقع گردد.

نکته ۸۵: اگر $x(t)$ یک سیگنال دلخواه و $f(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، آن‌گاه $x(f(t))$ با دوره تناوب T متناوب خواهد بود و البته ممکن است با دوره تناوب‌های دیگری نیز متناوب باشد.

$$f(t)\ \text{متناوب با}\ T \longrightarrow x(f(t))\ \text{متناوب با}\ T$$

به عنوان مثال سیگنال نامتناوب $x(t)=e^t$ و سیگنال متناوب $f(t)=\cos t$ با دوره تناوب $T=2\pi$ را در نظر بگیرید. در این صورت سیگنال $x(f(t))=x(\cos t)=e^{\cos t}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ متناوب می‌باشد.

مثال ۱

سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T=3$ متناوب است. کدام تساوی (یا تساوی‌ها) لزوماً صحیح هستند؟

الف) $x(\cos(t+3))=x(\cos(t))$ ب) $x(\cos(t)+3)=x(\cos(t))$

ج) $x(\cos(t+2\pi))=x(\cos(t))$ د) $x(\cos(t)+2\pi)=x(\cos(t))$

حل:

$x(t)$ با دوره تناوب $T=3$ متناوب است، بنابراین $x(t+3)=x(t)$ می‌باشد. حال با جایگذاری $\cos t$ به جای t در دو طرف این تساوی داریم:

$$x(t+3)=x(t)\xrightarrow{t\to\cos t}x(\cos(t)+3)=x(\cos(t))$$

همچنین چون $\cos t$ با دوره تناوب $T=2\pi$ متناوب است، $\cos(t+2\pi)=\cos(t)$ می‌باشد و در نتیجه $x(\cos(t+2\pi))=x(\cos(t))$ خواهد بود. یعنی $x(\cos(t))$ نیز با $T=2\pi$ متناوب است. بنابراین تساوی‌های «ب» و «ج» صحیح هستند. البته این مثال با توجه به نکات ۸۴ و ۸۵ و با فرض $f(t)=\cos t$ نیز قابل حل بود.

نکته ۸۶: سیگنال‌های $\cos(\frac{a\pi}{b}n^2)$ و $\sin(\frac{a\pi}{b}n^2)$ و $e^{j\frac{a\pi}{b}n^2}$ متناوبند ($\frac{a}{b}$ یک کسر گویا و تا حد امکان ساده‌شده است). اگر a و b هر دو فرد باشند، دوره تناوب این سیگنال‌ها برابر $2b$ و در غیر این صورت برابر b خواهد بود.[1]

$$\cos(\frac{a\pi}{b}n^2),\ \sin(\frac{a\pi}{b}n^2),\ e^{j\frac{a\pi}{b}n^2}\longrightarrow\begin{cases}\text{هر دو فرد}\ a,b\longrightarrow N=2b\\ \text{در غیر این صورت}\longrightarrow N=b\end{cases}$$

اثبات: اثبات این نکته را در حالت خاص، در مثال بعد بیان خواهیم کرد.[2]

مثال ۲

دوره تناوب سیگنال $x[n]=\cos(\frac{3\pi}{8}n^2)$ را به‌دست آورید.

---

[1] البته این نکته استثنائاتی هم ممکن است دارا باشد که یکی از آن‌ها سیگنال $\sin(\frac{\pi}{4}n^2)$ می‌باشد که دوره تناوب آن علی رغم اینکه طبق این نکته برابر ۴ به‌دست می‌آید، اما با عددگذاری و رسم آن ملاحظه می‌شود که دوره تناوب آن برابر ۲ است. در واقع در این مورد استثناء، با استفاده از این نکته، به‌جای دوره تناوب اصلی، به دوره تناوب غیراصلی می‌رسیم!

[2] در حالت کلی می‌توان ثابت کرد که اگر سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشد، سیگنال $x[n^k]$ نیز با N یا کسری از آن یعنی $\frac{N}{m}$ متناوب خواهد بود. اما دقت کنید که این موضوع و همچنین نکته ۸۶ در حالت زمان‌پیوسته لزوماً برقرار نیست.

حل:

با توجه به نکته ۸۶ و به‌ازای $a = ۳$ و $b = ۸$، دوره تناوب این سیگنال برابر $N = b = ۸$ می‌باشد. اما ما در اینجا این موضوع را دقیقاً اثبات می‌کنیم. برای محاسبه دوره تناوب سیگنال $x[n] = \cos(\frac{۳\pi}{۸}n^۲)$ باید کوچکترین N حقیقی و مثبتی که در رابطه $x[n+N] = x[n]$ صدق می‌کند را محاسبه می‌کنیم:

$$x[n+N] = x[n] \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{۳\pi}{۸}(n+N)^۲\right) = \cos\left(\frac{۳\pi}{۸}n^۲\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{۳\pi}{۸}n^۲ + \frac{۳\pi}{۸}N^۲ + \frac{۳\pi}{۴}nN\right) = \cos\left(\frac{۳\pi}{۸}n^۲\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۳\pi}{۸}n^۲ + \frac{۳\pi}{۸}N^۲ + \frac{۳\pi}{۴}nN = \frac{۳\pi}{۸}n^۲ + ۲k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۸}N^۲ + \frac{۳}{۴}nN = ۲k$$

عبارت فوق بیان می‌کند که $\frac{۳}{۸}N^۲ + \frac{۳}{۴}nN$ به‌ازای هر n باید مضربی از ۲ باشد. حال باید با سعی و خطا، N مناسب را پیدا نماییم. به راحتی می‌توان تشخیص داد که کوچک‌ترین N ای که باعث می‌شود عبارت $\frac{۳}{۸}N^۲ + \frac{۳}{۴}nN$ به‌ازای هر n، مضربی از ۲ باشد، $N = ۸$ است.

در فصل اول و نکته ۶ بیان کردیم که هر سیگنالی به فرم $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z(t-mT)$ حتماً با دوره تناوب T متناوب است. حال می‌خواهیم این نکته را تعمیم دهیم:

نکته ۸۷: اگر سیگنال زمان‌گسسته $f(m)$ با دوره تناوب M متناوب باشد، آن‌گاه سیگنال $x(t)$ به فرم کلی $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z(t-mT)$ با دوره تناوب $M \times T$ متناوب خواهد بود.

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z(t-mT) \longrightarrow x(t) \text{ متناوب با } M \times T$$

برای درک بهتر از سیگنال $x(t)$، سیگما را باز می‌کنیم:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z(t-mT)$$
$$= \cdots + \underbrace{f(-۲)z(t+۲T)}_{m=-۲} + \underbrace{f(-۱)z(t+T)}_{m=-۱} + \underbrace{f(۰)z(t)}_{m=۰} + \underbrace{f(۱)z(t-T)}_{m=۱} + \underbrace{f(۲)z(t-۲T)}_{m=۲} + \cdots$$

$z(t)$ در این رابطه می‌تواند هر سیگنال دلخواهی باشد. در عبارت فوق، $z(t)$، T تا T تا (با مضربی از T) به چپ و راست انتقال داده شده (البته دامنه آن نیز در $f(m)$ متناظر ضرب شده است) و سپس شکل‌های حاصل با هم جمع شده‌اند. نکته ۸۷ بیان می‌کند که اگر سیگنال زمان‌گسسته $f(m)$ با دوره تناوب M متناوب باشد (یعنی $f(m+M) = f(m)$ باشد)، شکل حاصل یعنی $x(t)$ با $M \times T$ متناوب خواهد بود.

برای توجیه این نکته، با باز کردن سیگمای $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z(t-mT)$ به‌صورت زیر داریم:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z(t-mT) = \cdots + \underbrace{f(۰)z(t)}_{m=۰} + \underbrace{f(۱)z(t-T)}_{m=۱} + \cdots + \underbrace{f(M)z(t-MT)}_{m=M} + \cdots$$

از آنجا که $f(m)$ با M متناوب است، $f(0)=f(M)$ می‌باشد و در نتیجه در عبارت فوق، جمله $f(M)z(t-MT)$ دقیقاً انتقال‌یافته جمله $f(0)z(t)$ به مقدار MT خواهد بود و در واقع شکل $f(M)z(t-MT)$ تکرار شکل $f(0)z(t)$ می‌باشد. از آنجا که فاصله این دو شکل برابر MT است، پس سیگنال حاصل با دوره تناوب MT متناوب خواهد بود.

این نکته برای حالت زمان‌گسسته نیز برقرار است بدین صورت که سیگنال $x[n]$ به فرم کلی زیر با دوره تناوب $M\times N$ متناوب می‌باشد.

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z[n-mN]$$

مثال ۳

متناوب بودن سیگنال $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\prod(t-2m)$ را بررسی نمایید.

حل:

با مقایسه $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\prod(t-2m)$ با فرم کلی $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z(t-mT)$ ، داریم:

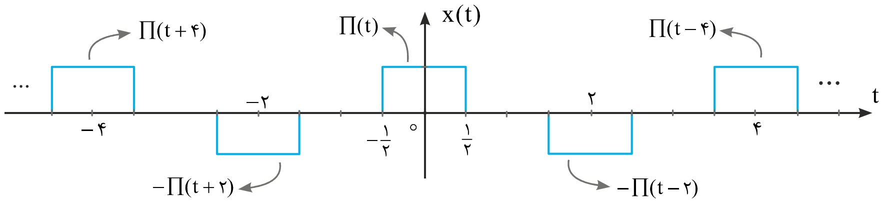
$$z(t)=\prod(t)\quad,\quad T=2\quad,\quad f(m)=(-1)^m\quad,\quad M=2$$

توجه کنید که $f(m)=(-1)^m=e^{j\pi m}$ نسبت به متغیر m با دوره تناوب $M=2$ متناوب است. حال داریم:

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)z(t-mT)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\prod(t-2m)$$

$$\Rightarrow\quad x(t)=\cdots+\prod(t+4)-\prod(t+2)+\prod(t)-\prod(t-2)+\prod(t-4)-\cdots$$

عبارت فوق بیان می‌کند که سیگنال $\prod(t)$ را ۲ تا ۲ تا به چپ و راست انتقال داده و یکی در میان دامنه‌های آن‌ها را در ۱− ضرب نموده و سپس شکل‌ها را با هم جمع کنیم که شکل حاصل به‌صورت زیر خواهد بود. ملاحظه می‌کنید که سیگنال $x(t)$ به‌صورت یک سیگنال متناوب با دوره تناوب ۴ ایجاد شده است.



شکل فوق با دوره تناوب $M\times T=2\times2=4$ متناوب است. در واقع شکل‌ها یکی در میان با هم یکسان می‌شوند و بنابراین دوره تناوب T در ۲ ضرب می‌شود.

مثال ۴

دوره تناوب سیگنال $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\cos(\frac{2\pi}{3}m)\delta(t-2m)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) متناوب نیست.

حال با استفاده از رابطه فوق، خواص سیستم را به راحتی بررسی می‌کنیم. مشخص است که سیستم حافظه‌دار است، زیرا مثلاً $y[3]$ از ضابطه اول برابر $x[1]$ می‌باشد. همچنین سیستم غیرعلی است، زیرا مثلاً $y[-3]$ از ضابطه اول برابر $x[-1]$ می‌باشد. سیستم TV است، زیرا شرط‌ها روی زمان است. همچنین سیستم وارون‌پذیر است، زیرا از همان ضابطه اول، می‌توان ورودی را از روی خروجی بازیابی کرد. یعنی ضابطه‌های دوم و سوم، اطلاعات اضافه‌ای به خروجی ارسال می‌کند. در واقع داریم:

$$y[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{3}] & , n=3k \\ x[\frac{n-1}{3}] & , n=3k+1 \\ x[\frac{n-2}{3}] & , n=3k+2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x[n]=y[3n]$$

این موضوع از روی شکل هم مشخص است که به راحتی با یک فشردگی با ضریب ۳ می‌توان از روی خروجی به ورودی رسید. دقت کنید که ورودیِ همه زمان‌ها از همان ضابطه اول به خروجی منتقل می‌گردد و می‌توانیم ضابطه‌های دوم و سوم را در نظر نگیریم. به عبارت دیگر وارون‌پذیری سیستم فوق، دقیقاً مانند سیستم $y[n]=x_{(3)}[n]$ می‌باشد. خطی بودن و پایداری سیستم نیز واضح است.

همچنین پاسخ به ورودی $x[n]=\delta[n]$ برابر می‌شود با:

$$x[n]=\delta[n] \longrightarrow y[n]=\delta_{(3)}[n]+\delta_{(3)}[n-1]+\delta_{(3)}[n-2]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

پاسخ ضربه سیستم نیز به معنی همان پاسخ به ورودی $x[n]=\delta[n]$ می‌باشد و در واقع گزینه‌های ۱ و ۲ یک چیز را بیان می‌کنند. اما شاید نیت طراح از به‌کار بردن لفظ «پاسخ ضربه»، تلویحاً اشاره به LTI بودن سیستم بوده که چون این سیستم LTI نیست، گزینه ۲ نادرست می‌شود.

گزینه ۱ صحیح است.

در واقع $s+3$ همان معادله مشخصه است که چون ریشه آن برابر $s=-3$ می‌باشد، نتیجه می‌دهد که پاسخ همگن به فرم کلی $y_h(t)=A_1e^{-3t}$ خواهد بود.[1] پاسخ خصوصی[2] را نیز با توجه به ورودی $x(t)=k\,e^{-2t}u(t)$ به فرم کلی مقابل حدس می‌زنیم: $y_p(t)=Be^{-2t}\ ,\ t>0$

با جایگذاری پاسخ فوق در معادله $y_p'(t)+3y_p(t)=k\,e^{-2t}u(t)$ خواهیم داشت:

$$(Be^{-2t})'+3(Be^{-2t})=k\,e^{-2t}\ ,\ t>0 \quad\Rightarrow\quad -2Be^{-2t}+3Be^{-2t}=k\,e^{-2t} \quad\Rightarrow\quad B=k$$

بنابراین پاسخ خصوصی برابر عبارت مقابل می‌باشد: $y_p(t)=k\,e^{-2t}\ ,\ t>0$

در نتیجه خروجی کل به‌ازای $t>0$ برابر خواهد بود با:

$$y(t)=A_1e^{-3t}+k\,e^{-2t}\ ,\ t>0$$

پاسخ فوق برای زمان‌های مثبت معتبر است. برای زمان‌های منفی، $x(t)=0$ می‌باشد و بنابراین فقط پاسخ همگن به فرم کلی $y_h(t)=A_2e^{-3t}$ خواهیم داشت. در نتیجه پاسخ سیستم مذکور به‌ازای همه زمان‌ها به فرم کلی زیر می‌باشد:

$$y(t)=\begin{cases}A_1e^{-3t}+k\,e^{-2t}\ , & t>0\\ A_2e^{-3t}\ , & t<0\end{cases}$$

حال باید با اعمال شرط کمکی $y(0^+)=C$ به رابطه فوق، مقادیر مجهول A_1 و A_2 را تعیین نماییم. با جایگذاری $y(0^+)=C$ در ضابطه اول داریم:

$$y(0^+)=C=A_1e^{-3(0^+)}+k\,e^{-2(0^+)}=A_1+k \quad\longrightarrow\quad A_1=C-k$$

بنابراین ضابطه اول به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید: $y(t)=(C-k)e^{-3t}+k\,e^{-2t}\ ,\ t>0$

برای تعیین A_2 ابتدا باید $y(0^-)$ را تعیین کنیم. $y(t)$ تابعی پیوسته می‌باشد، زیرا در غیر این صورت به علت وجود $y'(t)$ در معادله دیفرانسیل، ورودی باید شامل ضربه باشد که این‌طور نیست. پس $y(0^-)=y(0^+)=C$ می‌باشد و در نتیجه با اعمال $y(0^-)=y(0^+)$ به رابطه خروجی (ضابطه دوم)، خواهیم داشت:

$$y(0^-)=y(0^+)=C=A_2e^{-3(0^+)}=A_2$$

بنابراین خروجی این سیستم به‌ازای همه زمان‌ها برابر می‌شود با:[3]

$$y(t)=\begin{cases}(C-k)e^{-3t}+k\,e^{-2t}\ , & t>0\\ Ce^{-3t}\ , & t<0\end{cases}$$

---

[1] بحث معادله مشخصه و چگونگی تعیین پاسخ همگن معادلات خطی با ضرایب ثابت را می‌توانید در درس معادلات دیفرانسیل مطالعه نمایید، اما در اینجا می‌توان این موضوع را با دید فرکانس پاسخ سیستم نیز توجیه کرد به این صورت که تساوی $Y_h(s)(s+3)=0$ بیان می‌دارد تنها پاسخ غیرصفری که در این رابطه صدق می‌کند، پاسخی است که فقط حاوی فرکانس $s=-3$ باشد، زیرا در این صورت ضریب آن $(s+3)$ در این فرکانس، صفر می‌شود و تساوی فوق برقرار خواهد شد؛ پس پاسخ همگن به‌صورت $y_h(t)=Ae^{-3t}$ می‌باشد. در واقع ریشه‌های معادله مشخصه، فرمت کلی پاسخ همگن را تعیین می‌کند و در واقع پاسخ همگن شامل عباراتی به فرم e^{a_it} می‌باشد که a_iها ریشه‌های معادله مشخصه هستند.

[2] Particular response

[3] دقت کنید که تحلیل این معادلات در اینجا با آنچه در درس مدارهای الکتریکی بحث می‌شود کمی متفاوت است. در درس مدارهای الکتریکی، پاسخ معادله دیفرانسیل مربوط به یک مدار الکتریکی معمولاً برای زمان‌های مثبت مورد بحث واقع می‌شود و فرض بر این است که مقدار خروجی در لحظه صفر به حالت پایدار رسیده است و در واقع در آنجا معمولاً پاسخ را به‌صورت مجموع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر در نظر می‌گیرند، اما در اینجا خروجی برای همه زمان‌ها اعم از مثبت و منفی مد نظر است؛ بنابراین سعی نکنید که این بحث را با بحث تحلیل معادلات دیفرانسیل در درس مدار، مرتبط نمایید!

در نتیجه داریم:

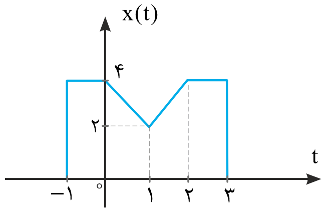
$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\sin ۲\pi t}{\pi t}dt=\frac{۱}{۲\pi}\Pi(\frac{\omega}{۲\pi})*\Pi(\frac{\omega}{۴\pi})\Big|_{\omega=۰}$$

$$\Rightarrow\quad A=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(\frac{\theta}{۲\pi})\Pi(\frac{\omega-\theta}{۴\pi})d\theta\Big|_{\omega=۰}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(\frac{\theta}{۲\pi})\Pi(\frac{-\theta}{۴\pi})d\theta$$

با توجه به زوج بودن تابع پالس، $\Pi(\frac{-\theta}{۴\pi})=\Pi(\frac{\theta}{۴\pi})$ می‌باشد و بنابراین انتگرال فوق دقیقاً برابر همـان انتگـرال به‌دست آمده از روش قبلی است که حاصل آن برابر ۱ شد. در نتیجه گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۰

سیگنال $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. مقدار انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}X^۲(j\omega)d\omega$ چقدر است؟



۱) ۱۴π

۲) ۲۴π

۳) ۴۸π

۴) ۸π

حل:

این مثال، همان تست ۴۹ فصل پنجم می‌باشد که در آنجا با روش دیگری حل شد و ما در اینجا مـی‌خـواهیم ایـن انتگرال را با استفاده از رابطه تعمیم یافته پارسوال حل نماییم.[۱] داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)Y(\omega)d\omega=۲\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(-t)dt$$

حال باید سمت چپ رابطه فوق را با انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}X^۲(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)X(\omega)d\omega$ معادل‌سازی کنـیم. برای این کار باید $Y(\omega)$ را همان $X(\omega)$ در نظر بگیریم. در این صورت داریم:

$$Y(\omega)=X(\omega)\xrightarrow{F^{-۱}}y(t)=x(t)\xrightarrow{t\to -t}y(-t)=x(-t)$$

در نتیجه رابطه تعمیم یافته پارسوال در حالت $Y(\omega)=X(\omega)$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\underbrace{Y(\omega)}d\omega=۲\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\underbrace{y(-t)}dt$$

$$\downarrow\quad\downarrow\qquad\qquad\downarrow\quad\downarrow$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\overbrace{X(\omega)}d\omega=۲\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\overbrace{x(-t)}dt\longrightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}X^۲(\omega)d\omega=۲\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x(-t)dt$$

بنابراین برای محاسبه انتگرال I، باید مساحت شکل $x(t)x(-t)$ را حساب کنیم. شکل $x(t)x(-t)$ را مـی‌تـوانیم با ضرب $x(-t)$ در $x(t)$ به‌صورت زیر رسم نماییم:[۲]

---

[۱] توجه کنید که انتگرال داده شده، با رابطه پارسوال تفاوت می‌کند و باید از رابطه تعمیم یافته پارسوال استفاده کـرد نـه رابطـه پارسـوال! زیرا $X^۲(\omega)$ در حالت کلی با $|X(\omega)|^۲$ برابر نیست، مگر اینکه $X(\omega)$ حقیقی باشد که اتفاقاً در اینجـا ایـن‌طـور نیسـت. دلیـل حقیقـی نبودن $X(\omega)$ در این مثال، در نکته ۱۰۹ بیان خواهد شد.

[۲] حتماً خودتان شکل $x(t)$ و $x(-t)$ را در زیر هم کشیده و آن‌ها را در هم ضرب کرده و به شکل داده شده برسید.

حل:

بررسی گزینه ۱: با تغییر متغیر $\tau \to -\alpha$ و نوشتن $\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(\tau+t)\,d\tau$ به‌صورت کانولوشن داریم:

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(\tau+t)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\alpha)\,y(\tau-\alpha)\,d\alpha=x(-t)*y(t)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\phi_{yx}(t)=y(-t)*x(t) \quad\Rightarrow\quad \phi_{yx}(-t)=y(t)*x(-t)=x(-t)*y(t)=\phi_{xy}(t)$$

بررسی گزینه ۲:

$$\phi_{xx}(t)=x(-t)*x(t) \xrightarrow{F} \Phi_{xx}(\omega)=X(-\omega)X(\omega)=X^*(\omega)X(\omega)=|X(\omega)|^۲$$

دقت کنید که چون طبق صورت تست، $x(t)$ حقیقی است، $X(-\omega)=X^*(\omega)$ می‌باشد.

بررسی گزینه ۳:

$$\phi_{xx}(\circ)=\phi_{xx}(t)\Big|_{t=\circ}=x(-t)*x(t)\Big|_{t=\circ}=x(t)*x(-t)\Big|_{t=\circ}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,x(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x^۲(\tau)\,d\tau\ge\circ$$

دقت کنید که چون طبق صورت تست، $x(t)$ حقیقی است، $x^۲(t)\ge\circ$ می‌باشد.

گزینه ۴ صحیح است.

۱۴. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $-\frac{۱}{\pi t}*\frac{۱}{\pi t}=\delta(t)$

۲) $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega=\delta(t)$

۳) اگر سیگنال $x[n]$ یا $x(t)$ متناوب باشد، تبدیل فوریه آن فقط شامل توابع ضربه می‌باشد.

۴) اگر تبدیل فوریه سیگنالی فقط شامل توابع ضربه باشد، آن سیگنال قطعاً متناوب خواهد بود.

حل:

بررسی گزینه ۱: با توجه به اینکه تبدیل فوریه $\frac{۱}{\pi t}$ برابر $-j\,\mathrm{sgn}\,\omega$ می‌باشد و همچنین با استفاده از خاصیت کانولوشن داریم:

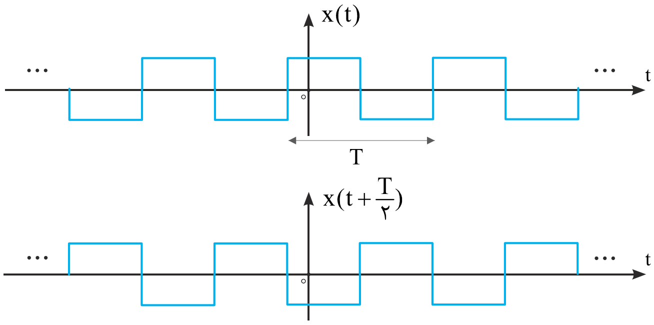
$$x(t)=-\frac{۱}{\pi t}*\frac{۱}{\pi t} \xrightarrow{F} X(\omega)=-\left(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega\right)^۲=۱ \xrightarrow{F^{-۱}} x(t)=\delta(t)$$

بررسی گزینه ۲: با توجه به اینکه تبدیل فوریه $x(t)=\delta(t)$ برابر $X(\omega)=۱$ می‌باشد، رابطه عکس تبدیل فوریه برای این زوج تبدیل فوریه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x(t)=\delta(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)=۱ \qquad\Rightarrow\qquad \delta(t)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(۱)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

حال با ساده کردن عبارت فوق داریم:

مثلاً سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب اصلی T در شکل زیر را در نظر بگیرید. مشخص است که اگر این سیگنال را به مقدار $\frac{T}{2}$ به سمت چپ (یا راست) انتقال دهیم، مثل این است که دامنه (مقدار) آن را در یک منفی ضرب نمودیم.



ضرایب فوریه سیگنال‌هایی که تقارن نیم موج دارند، ویژگی خاصی دارد که در نکته زیر به آن اشاره می‌شود.

نکته ۱۱۲: اگر سیگنال $x(t)$ تقارن نیم موج داشته باشد، یعنی $x(t+\frac{T}{2})=-x(t)$ یا $x(t-\frac{T}{2})=-x(t)$ باشد، آنگاه بسط سری فوریه $x(t)$ فقط شامل هارمونیک‌های فرد می‌باشد و ضرایب هارمونیک‌های زوج آن برابر صفر است.[1] عکس این گزاره نیز برقرار می‌باشد.

$$\boxed{x(t\pm\frac{T}{2})=-x(t) \longleftrightarrow a_{2k}=0}$$

اثبات: ضرایب فوریه دو طرف تساوی $x(t)=-x(t+\frac{T}{2})$ را با توجه به خاصیت انتقال زمانی محاسبه می‌کنیم:

$$x(t)=-x(t+\frac{T}{2})$$

$$a_k=-a_k e^{jk\omega_0(\frac{T}{2})} \xrightarrow{\omega_0=\frac{2\pi}{T}} a_k=-a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})(\frac{T}{2})}=-a_k e^{jk\pi}=-a_k(-1)^k$$

بنابراین داریم:

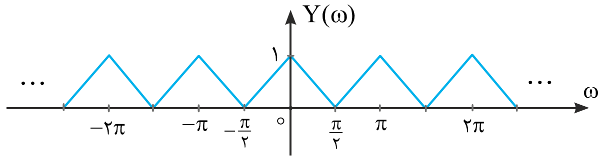
$$a_k=-a_k(-1)^k \longrightarrow a_k+a_k(-1)^k=0 \longrightarrow a_k\left[1+(-1)^k\right]=0$$

حال رابطه فوق را به ازای kهای زوج و فرد تفکیک می‌کنیم. $\left[1+(-1)^k\right]$ به‌ازای kهای زوج و فرد به ترتیب برابر ۲ و ۰ می‌باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

[1] منظور از هارمونیک‌های فرد، هارمونیک‌های اول، سوم، پنجم و ... یعنی $a_{\pm1}$، $a_{\pm3}$، $a_{\pm5}$ و ... است. همچنین منظور از هارمونیک‌های زوج، هارمونیک‌های صفرم، دوم، چهارم و ... یعنی a_0، $a_{\pm2}$، $a_{\pm4}$ و ... می‌باشد.

حل:

ابتدا شکل کامل $Y(\omega)$ را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



روش اول: ابتدا می‌توانیم $Y(\omega)$ را به‌صورت زیر برحسب $X(\omega)$ داده شده در مثال ۸ متن درس در فصل دوازدهم بنویسیم:[1]

$$Y(\omega)=X(\omega)+X(\omega-\pi) \xrightarrow{F^{-1}} y[n]=x[n]+x[n](-1)^n=\begin{cases}2x[n] & , \text{زوج } n \\ 0 & , \text{فرد } n\end{cases}$$

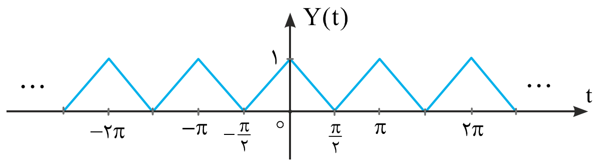
در نتیجه با توجه به $x[n]$ به‌دست آمده در مثال مذکور، خواهیم داشت:

$$y[2]=2x[2]=2\frac{4\sin^2\frac{2\pi}{4}}{\pi^2 2^2}=\frac{2}{\pi^2}$$

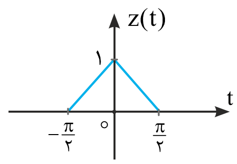
روش دوم: در این روش می‌توانیم از خاصیت دوگانی تبدیل ـ سری استفاده کنیم، زیرا محاسبه ضرایب فوریه سیگنال $Y(t)$ نسبتاً ساده است. اما با توجه به اینکه دوره تناوب $Y(t)$ برابر $\frac{2\pi}{m}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ است، خاصیت دوگانی تبدیل ـ سری به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{array}{ccc} y[n] & \xleftrightarrow{\;F\;} & Y(\omega) \\ & \times & \\ Y(t) & \xleftrightarrow{\;FS\;} & y[-2k] \end{array}$$

یعنی کافی است که ضرایب فوریه سیگنال $Y(t)$ را محاسبه کنیم ($y[-2k]$) و از روی آن، $y[n]$ را به‌دست آوریم. طبق شکل داده شده برای $Y(\omega)$، $Y(t)$ به شکل زیر می‌باشد:



شکل فوق با دوره تناوب π متناوب است. برای محاسبه ضرایب فوریه $Y(t)$ می‌توانیم از نکته ۴۶ استفاده کنیم. برای این کار ابتدا $Y(t)$ را در یک دوره تناوب در نظر گرفته و آن را $z(t)$ می‌نامیم:



---

[1] این سؤال را در حالتی که دوره تناوب تبدیل فوریه برابر 2π بود، در مثال ۸ فصل دوازدهم حل کردیم.

۶. تبدیل لاپلاس گویای سیگنال دوسمتی $x(t)$ تنها دارای دو قطب در $s=1,3$ می‌باشد. قطب‌های تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t)=x^2(t)$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $s=2,6$ ۲) $s=1,9$ ۳) $s=2,4,6$ ۴) $s=1,7,9$

حل:

با توجه به اینکه در تبدیل لاپلاس، خاصیتی با عنوان ضرب در حوزه زمان نداریم، باید از روش مستقیم این تست را حل نماییم. ابتدا با توجه به قطب‌های $X(s)$ و نکته ۵۴ و همچنین دو سمتی بودن سیگنال، فرم کلی $x(t)$ به‌صورت $x(t)=Ae^{t}u(t)+Be^{3t}u(-t)$ می‌باشد. حال $y(t)=x^2(t)$ برابر می‌شود با:

$$y(t)=x^2(t)=\left(Ae^{t}u(t)+Be^{3t}u(-t)\right)^2=A^2e^{2t}u(t)+B^2e^{6t}u(-t)+2ABe^{4t}u(t)u(-t)$$

اما با توجه به اینکه جمله $2ABe^{4t}u(t)u(-t)$ برابر صفر می‌باشد، قطب‌های عبارت فوق فقط در $s=2,6$ قرار دارند.

گزینه ۱ صحیح است.

۷. کدام گزینه صحیح است؟

۱) تبدیل لاپلاس یک سیگنال فرد حتماً صفری در مبدأ دارد.

۲) تبدیل $\mathscr{Z}$ یک سیگنال فرد حتماً صفری در $z=\pm1$ دارد.

۳) هر دو گزینه ۱ و ۲

۴) هیچ‌کدام

حل:

بررسی گزینه ۱: طبق نکته ۵۲ می‌دانیم که تبدیل لاپلاس یک سیگنال فرد، تابعی فرد است و هر تابع فرد نیز در مبدأ صفر است. در نتیجه $X(s)$ قطعاً در مبدأ، صفر دارد. البته به جهت فرد بودن تابع $X(s)$، مرتبه این صفر باید فرد باشد، وگرنه $X(s)$ دیگر تابعی فرد نخواهد بود.

بررسی گزینه ۲: طبق نکته ۵۸ می‌دانیم که تبدیل $\mathscr{Z}$ یک سیگنال فرد، در رابطه $X(z)=-X(z^{-1})$ صدق می‌کند. با جایگذاری $z=\pm1$ در دو طرف این تساوی داریم:

$$X(\pm1)=-X(\pm1)\quad\Rightarrow\quad X(\pm1)=0$$

یعنی تبدیل $\mathscr{Z}$ یک سیگنال فرد حتماً صفرهایی در $z=1$ و $z=-1$ دارد. البته می‌توان نشان داد که مرتبه این صفرها باید فرد باشد.

گزینه ۳ صحیح است.

۸. $x(t)$ سیگنالی حقیقی و فرد است که تبدیل لاپلاس آن یعنی $X(s)$، دقیقاً چهار قطب محدود دارد و یکی از آن‌ها در $s=-1+2j$ قرار دارد. اگر $X(s)$ حداکثر یک صفر داشته باشد و $X(1)=\frac{1}{16}$ باشد، مقدار $X(2)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{2}{65}$ ۲) $\frac{3}{65}$ ۳) $\frac{6}{65}$ ۴) $\frac{4}{65}$

از آنجا که $y[n]$ به‌طور کامل در دسترس نیست، به جای تبدیل $\mathcal{Z}$ آن، $Y(z)$ قرار می‌دهیم. حال $G(z)$ برابر می‌شود با:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{Y(z)}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}=(1-\frac{1}{2}z^{-1})\,Y(z)=Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

حال از دو طرف رابطه فوق با استفاده از خاصیت انتقال زمانی عکس تبدیل $\mathcal{Z}$ می‌گیریم تا $y[n]$ به‌دست آید:

$$g[n]=y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]\quad\xrightarrow{n=1}\quad g[1]=y[1]-\frac{1}{2}y[0]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1)=0$$

گزینه ۱ صحیح است.[1]

۲۰. یک سیستم زمان‌گسسته LTI را با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید. می‌دانیم پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ به‌ازای $n \ge N$ و $n \le -1$ صفر است. برای تعیین $h[n]$ دانستن کدام دسته زوج ورودی ـ خروجی هم لازم و هم کافی است؟ (سراسری ۸۵)

۱) $x[k]$ و $y[k]$ برای N مقدار متوالی k
۲) $x[k]$ و $y[k]$ برای $2N$ مقدار متوالی k
۳) $x[k]$ و $y[k]$ برای $-\infty < k < +\infty$
۴) هیچ‌کدام

حل:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{N-1}h[k]x[n-k]$$

با باز کردن سیگمای فوق داریم:

$$y[n]=h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+h[2]x[n-2]+\cdots+h[N-1]x[n-N+1]\qquad(1)$$

برای تعیین $h[n]$ باید N مجهول $h[0]$، $h[1]$، $h[2]$، ... و $h[N-1]$ را از رابطه (۱) به‌دست آوریم. بنابراین به N معادله مانند رابطه (۱) نیاز داریم. پس رابطه (۱) را باید برای N تا n مختلف بازنویسی کنیم تا یک دستگاه «N معادله ـ N مجهول» ایجاد شود و با حل این معادلات، N مجهول مورد نظر را به دست آوریم. اگر رابطه (۱) را برای N تا n مختلف بازنویسی کنیم، به N نقطه از خروجی نیاز خواهیم داشت. پس داشتن N نقطه از خروجی برای محاسبه مجهولات، هم لازم است و هم کافی. حال اگر این N نقطه از خروجی متوالی باشند، به $2N-1$ نقطه متوالی از ورودی نیازمندیم؛ زیرا با جایگذاری N تا n متوالی در رابطه (۱) مثلاً از $n=0$ تا $n=N-1$، به ورودی از $n=-N+1$ تا $n=N-1$ نیاز خواهیم داشت. همچنین اگر N نقطه از خروجی، متوالی نباشند، بسته به نقاط انتخاب شده، به نقاطی از ورودی نیاز خواهیم داشت و در حالت‌های مختلف باید جداگانه بررسی شود. بنابراین گزینه ۴ می‌تواند به عنوان پاسخ صحیح این تست در نظر گرفته شود. متأسفانه هدف طراح از طرح این تست به این صورت غیراستاندارد، مشخص نیست!

گزینه ۴ صحیح است.

[1] ارائه روش‌های مختلف در حل یک تست، می‌توان در درک و تحلیل بهتر آن تست و تست‌های مشابه، بسیار مفید باشد. بنابراین توصیه می‌شود هر چهار روش را به دقت مطالعه نمایید. اگرچه روش‌های اول و دوم و سوم، در واقع یک روش هستند!

حل:

سیگمای $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_۲[n](-۱)^n$ برابر تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $y_۲[n]$ در $z=-۱$ می‌باشد. در نتیجه ابتدا باید $H(-۱)$ و $X_۲(-۱)$ را حساب کنیم تا مقدار این سیگما به‌دست آید. با توجه به رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم LTI رابطه زیر بین تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های $x_۱[n]$ و $y_۱[n]$ برقرار است:

$$Y_۱(z)=X_۱(z)H(z) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_۱[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_۱[n]z^{-n}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \qquad (۱)$$

حال با توجه به اینکه سیستم پایدار است، $z=-۱$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار دارد. همچنین با توجه به دوره‌محدود بودن $x_۱[n]$، ناحیه همگرایی آن کل صفحه (به‌جز احتمالاً $z=۰,\infty$) می‌باشد و در نتیجه $z=-۱$ در ناحیه همگرایی $X_۱(z)$ نیز قرار دارد. پس $z=-۱$ در ناحیه همگرایی خروجی نیز قرار خواهد داشت. بنابراین با جایگذاری $z=-۱$ در دو طرف رابطه (۱) داریم:

$$Y_۱(-۱)=X_۱(-۱)H(-۱) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_۱[n](-۱)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_۱[n](-۱)^n\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n](-۱)^n$$

با جایگذاری $x_۱[n]$ و $y_۱[n]$ در رابطه فوق داریم:

$$H(-۱)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n](-۱)^n=\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_۱[n](-۱)^n}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_۱[n](-۱)^n}=\frac{۱+۱-۱-۱-۱}{-۱-۲+۱+۱+۳}=-\frac{۱}{۲}$$

حال از طرف دیگر داریم:

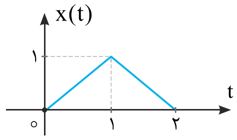
$$Y_۲(z)=X_۲(z)H(z) \xrightarrow{z=-۱} Y_۲(-۱)=X_۲(-۱)H(-۱)$$

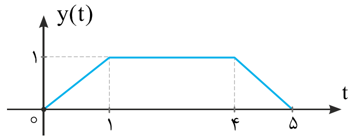
با توجه به اینکه $x_۲[n]$ دوره‌محدود است، $z=-۱$ در ناحیه همگرایی آن قرار دارد. حال با جایگذاری $H(-۱)=-\frac{۱}{۲}$ و $X_۲(-۱)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_۲[n](-۱)^n=-۳+۱-۲+۱=-۳$ در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_۲[n](-۱)^n=Y_۲(-۱)=X_۲(-۱)H(-۱)=(-۳)\times(-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

گزینه ۴ صحیح است.

۸. پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ شده است. اگر پاسخ ضربه سیستم برابر $h(t)$ باشد، مقدار $h(۲)$ برابر کدام است؟





۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ∞

ب) $e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$ به‌ازای همه τ های حقیقی

دسته‌ورودی داده شده در این قسمت، برابر $a_i(t)=\{e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\ ,\ \tau\in\mathbb{R}\}$ است که مطابق حالت اول نکته ۱۳۸ می‌باشد. سیگنال پایه برابر $a(t)=e^{-t}u(t)$ و طیف آن برابر $A(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$ می‌باشد که در هیچ فرکانسی صفر نیست، بنابراین سیستم خطی با این دسته‌ورودی شناسایی می‌شود و قطعاً هر سیگنال دلخواه را می‌توان بر حسب ترکیب خطی از $a(t-\tau)=e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$ (به‌ازای همه τ های حقیقی) نوشت.

ج) $\operatorname{sinc}(t-\tau)$ به‌ازای همه τ های حقیقی

دسته‌ورودی داده شده در این قسمت، برابر $a_i(t)=\{\operatorname{sinc}(t-\tau)\ ,\ \tau\in\mathbb{R}\}$ است که مطابق حالت اول نکته ۱۳۸ می‌باشد. سیگنال پایه برابر $a(t)=\operatorname{sinc}(t)$ و طیف آن برابر $A(\omega)=\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ می‌باشد که در فرکانس‌های خارج بازه $-\pi<\omega<\pi$ برابر صفر است، بنابراین سیستم خطی با این دسته‌ورودی شناسایی نمی‌شود و در واقع نمی‌توان هر سیگنال دلخواه را بر حسب ترکیب خطی از $a(t-\tau)=\operatorname{sinc}(t-\tau)$ نوشت.

د) $e^{j\omega_0 t}$ به‌ازای همه ω_0 های حقیقی

روش اول: دسته‌ورودی داده شده در اینجا به شکل حالت اول نکته ۱۳۸ نیست. اما اگر این دسته‌ورودی را به حوزه فرکانس ببریم، به دسته‌ورودی $B_i(\omega)=\{2\pi\delta(\omega-\omega_0)\ ,\ \omega_0\in\mathbb{R}\}$ می‌رسیم که مطابق حالت دوم نکته ۱۳۸ می‌باشد. طیف پایه برابر $B(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ و عکس تبدیل فوریه آن برابر $b(t)=1$ می‌باشد که در هیچ لحظه‌ای برابر صفر نیست، بنابراین طبق نکته ۱۳۸ سیستم خطی با این دسته‌ورودی شناسایی می‌شود و قطعاً هر طیف ورودی دلخواه را می‌توان بر حسب ترکیب خطی از $B(\omega-\omega_0)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ (به‌ازای همه ω_0 های حقیقی) نوشت.[1]

روش دوم: سؤال مطرح شده در اینجا این است که آیا می‌توان هر سیگنال ورودی دلخواه را بر حسب ترکیب خطی از $e^{j\omega_0 t}$ (به‌ازای ω_0 های حقیقی) نوشت یا خیر؛ برای این کار می‌توانیم از تبدیل فوریه کمک بگیریم. همان‌طور که در فصل تبدیل فوریه نیز بیان کردیم، سیگنال دلخواه $x(t)$ را می‌توان با استفاده از رابطه عکس تبدیل فوریه برحسب ترکیب خطی از $e^{j\omega_0 t}$ به‌ازای ω_0 های مختلف نوشت:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}d\omega_0$$

رابطه فوق در واقع بیانگر ترکیب خطی $x(t)$ از $e^{j\omega_0 t}$ به‌ازای $-\infty<\omega_0<+\infty$ است (توجه کنید که ω_0 متغیر انتگرال است). بنابراین سیستم خطی با دسته‌ورودی $e^{j\omega_0 t}$ (به‌ازای ω_0 های حقیقی) شناسایی می‌شود و می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواه $x(t)$ را بر حسب پاسخ به ورودی $e^{j\omega_0 t}$ و رابطه فوق، محاسبه کرد.

هـ) $\cos\omega_0 t$ به‌ازای همه ω_0 های حقیقی

دسته‌ورودی داده شده در این قسمت به شکل حالت اول نکته ۱۳۸ نیست. همچنین اگر این دسته‌ورودی را به حوزه فرکانس ببریم، به دسته‌ورودی $B_i(\omega)=\{\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\ ,\ \omega_0\in\mathbb{R}\}$ می‌رسیم که باز هم مطابق حالت دوم نکته ۱۳۸ نمی‌باشد. بنابراین برای بررسی این قسمت، نمی‌توانیم از نکته مذکور استفاده کنیم و باید مستقیماً بررسی کنیم که آیا می‌توان هر سیگنال دلخواه را بر حسب ترکیب خطی از $\cos\omega_0 t$ (به‌ازای ω_0 های حقیقی) نوشت یا خیر؛ یا به‌طور معادل آیا می‌توان هر طیف دلخواه را بر حسب ترکیب خطی از

[1] شبیه این کار را در فصل یازدهم و در بحث رابطه سیستم خطی در حوزه فرکانس انجام دادیم.

حال اگر این پاسخ ضربه را با ورودی $x(t)$ کانوالو کنیم، رابطه این سیستم LTI به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) = x(t) * \left(\delta(t) + \delta(t-1) + \sum_{k=4}^{+\infty} (-1)^k \delta(t - \tfrac{1}{2}k) \right)$$

$$\Rightarrow \quad y_1(t) = x(t) + x(t-1) + \sum_{k=4}^{+\infty} (-1)^k x(t - \tfrac{1}{2}k)$$

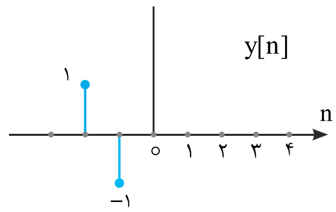
$$\Rightarrow \quad y_1(t) = x(t) + x(t-1) + x(t-2) - x(t-2/5) + x(t-3) - x(t-3/5) + x(t-4) - x(t-4/5) + \cdots$$

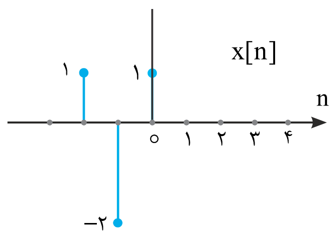
مشخص است که سیستم فوق، LTI است. حال ورودی $x(t)$ را در رابطه فوق جایگذاری نمایید و خروجی را محاسبه نمایید تا دقیقاً ملاحظه کنید که چگونه سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y_1(t)$ می‌تواند LTI باشد. همچنین اگر ناحیه همگرایی $H_1(s)$ را به‌صورت $-\infty < \mathrm{Re}[s] < 0$ در نظر بگیریم، می‌توان رابطه مشابهی (البته غیرعلی) به دست آورد. برای سیستم ۲ نیز با استفاده از $H_2(s)$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$y_2(t) = x(t) + x(t-1) - x(t-1/5) + x(t-2) - x(t-2/5) + x(t-3) - x(t-3/5) + x(t-4) - \cdots$$

گزینه ۳ صحیح است.

۹. کدام یک از دو گزاره زیر در مورد سیگنال‌های زمان‌گسسته شکل زیر صحیح است؟ (سراسری ۸۹)





الف) یک سیستم LTI علی می‌تواند $x[n]$ را به $y[n]$ تبدیل نماید.

ب) یک سیستم LTI پایدار می‌تواند $x[n]$ را به $y[n]$ تبدیل نماید.

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هردو ۴) هیچ‌کدام

حل:

در این تست یک زوج ورودی ـ خروجی از یک سیستم مجهول داده شده[1] و در واقع از ما خواسته شده است که «LTI و علی» بودن آن و همچنین «LTI و پایدار» بودن آن را بررسی نماییم. همان‌طور که در متن درس نیز اشاره شد، در چنین مسائلی بهتر است ابتدا LTI بودن سیستم را بررسی کنیم و در صورت LTI بودن سیستم، با استفاده از تابع تبدیل آن در مورد علی بودن و پایداری آن اظهار نظر نماییم. پس با توجه به نکته ۱۵۱ داریم:

$$x[n] = \delta[n+2] - 2\delta[n+1] + \delta[n] \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad X(z) = z^2 - 2z + 1 \quad , \quad |z| < \infty$$

$$y[n] = \delta[n+2] - \delta[n+1] \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad Y(z) = z^2 - z \quad , \quad |z| < \infty$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

[1] شکل‌ها را تقریباً به همان صورتی که در آزمون کشیده شده بودند، رسم کردیم.

اما با توجه به استدلالی که در تست قبل انجام دادیم، در اینجا نیز حداقل فرکانس نمونه‌برداری از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_s = \frac{\omega_1+\omega_2}{\left\lfloor \frac{\omega_1+\omega_2}{B} \right\rfloor} = \frac{19600\pi+20400\pi}{\left\lfloor \frac{19600\pi+20400\pi}{800\pi} \right\rfloor} = 800\pi \ \frac{rad}{s} \quad \Rightarrow \quad f_s = 400 \ Hz$$

به نظر می‌رسد احتمالاً مد نظر طراح، فرکانس نمونه‌برداری فوق بوده است.

گزینه ۲ صحیح است.

۱۲. $x(t)$ **سیگنالی پایین‌گذر با پهنای باند** $\frac{1}{2T}$ **و صادق در** $x(nT)=0\ ,\ n=\pm1\ ,\ \pm2\ ,\ \ldots$ **می‌باشد.** $X(f)$ **کدام فرم (فرم‌های) زیر را دارا است؟** **(سراسری ۸۴)**

۱) $X(f) \propto \Lambda(Tf)$

۲) $X(f) \propto \Lambda(2Tf)$

۳) $X(f) \propto \prod(Tf)$

۴) هر سه مورد

حل:

این تست، در واقع بیان می‌کند که اگر از سیگنال $x(t)$، با پریود T و فرکانس $f_s=\frac{1}{T}$ نمونه‌برداری کنیم، همه نمونه‌ها به جز نمونه $n=0$ برابر صفر می‌شوند. یعنی با نمونه‌برداری از $x(t)$ خواهیم داشت:

$$x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)=x(0)\delta(t)=A\,\delta(t)$$

حال با فرض اینکه $x(0)=A$ باشد، داریم:

$$x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=A\,\delta(t)$$

حال برای کسب اطلاعاتی در مورد $X(f)$، از دو طرف رابطه فوق، در حوزه f تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$X(f)*\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T})=A \quad \Rightarrow \quad X(f)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T})=AT\equiv \text{ثابت} \qquad (1)$$

رابطه فوق به این معنی است که اگر $X(f)$ را با مضربی از $\frac{1}{T}$ به سمت چپ و راست انتقال دهیم و با هم جمع نماییم، مقدار ثابتی ایجاد خواهد شد. حال ما از این رابطه می‌خواهیم فرم کلی $X(f)$ را تعیین کنیم. طبیعتاً $X(f)$ مقدار منحصر به فردی نیست و بی‌نهایت $X(f)$ می‌توان پیدا کرد که در این رابطه صدق کند. بنابراین باید تک‌تک گزینه‌ها را بررسی نماییم.

بررسی گزینه ۱: $X(f)$ داده شده در گزینه ۱، به شکل زیر می‌باشد: